2. izpit iz OPTIMIZACIJSKIH METOD

7. september 2009

1. Sultan ima n žena. Njihove sobane so razporejene v krogu okoli osrednje palače. Po starodavni tradiciji mora ob vsaki obletnici svojega kronanja vsaki ženi podariti m različnih kosov nakita. Pri tem naj bi bili vsi kosi nakita različni. Če bi namreč ena žena videla, da nosi še druga enak nakit, bi bil takoj ogenj v strehi. Sultan pa bi rad nekoliko privarčeval pri nakupih daril, zato želi kupiti po več enakih kosov, saj s tem dobi količinske popuste. Domislil se je zvitega načrta, kako bo to storil: z ženami se je dogovoril, da bodo nosile svoj nakit samo v svojih sobanah. Vendar s tem še ni vse rešeno: vsaka žena še vedno lahko vidi, kakšen nakit nosita ženi v obeh sosednjih sobanah. Torej še vedno ostane pogoj, da ženi v sosednjih sobanah ne dobita niti enega enakega kosa nakita. Koliko najmanj različnih kosov nakita mora sultan kupiti, da bo ohranil mir v hiši?

   (a) Formuliraj kot optimizacijsko nalogo.

   (b) Reši nalogo (z utemeljitvijo) v primerih

      i. ko je n sodo število in m poljuben,

      ii. ko je $n = 3$ in m poljuben,

      iii. ko je n liho število in $m = 1$,

      iv. za $n = 5$ in $m = 4$.

2. (IŠRM) Imamo n meritev odvisnih količin x in y in radi bi dobili linearno funkcijo

$$f(x) = ax + b,$$

   tako da je $f(x)$ čim bližje y. Problem lahko rešujemo z metodo najmanjših kvadratov, pogosto pa je boljša *enakomerna aproksimacija*: iščemo takšna a in b, da minizirata maksimalno napako

$$\max_{i=1,\dots,n} |f(x_i) - y_i|$$

   Prevedi iskanje optimalnih koeficientov a in b na problem linearnega programiranja.

   Nasvet: dodajte novo spremenljivko $e = \max_{i=1,\dots,n} |ax_i + b - y_i|$ *in jo poskusite oceniti z linearnimi neenačbami.*

2. (FRI) Pri katerih vrednostih parametra a je množica

$$A = \{(x, y, z) \in \mathbb{R} \,|\, x^2 + 2ay^2 + 5z^2 \leq 4xz + 2yz + 10\}$$

   konveksna?

3. Dana je optimizacijska naloga (Φ, P, Min), kjer je

$$P(x, y, z) = 2x + 3y^3 + z^2,$$

   območje Φ pa je podmnožica $\mathbb{R}^2$, določena z neenačbama $x^2 + 2y^2 + z^2 \leq 4$ in $z \geq 0$.

   a) Ali je naloga konveksna in strogo neprotislovna?

   b) S pomočjo Karush-Kuhn-Tuckerjevega izreka preveri, da je minimum dosežen v točki $(-2, 0, 0)$.

4. Reši problem linearnega programiranja (Φ, P, Min),

$$P(x,y,z) = 3x - y + z$$

območje $\Phi \subseteq \mathbb{R}^3$ pa je določeno z neenačbami

$$\begin{aligned} 2x - 3y + z &\leq 5 \\ x + 2y - z &\geq 1 \\ x - 5y - 3z &\geq 2 \\ x, y, z &\geq 0 \end{aligned}$$