

1. kolokvij iz OPTIMIZACIJSKIH METOD

24. april 2009

1. V nerazviti puščavski deželi Daljnistan so odkrili nafto. Do nedavnega nomadska država zdaj doživlja hiter razvoj, v katerega spada izgradnja cestnega omrežja. V deželi je N vasi, ki jih je potrebno povezati s cestami, tako da bo mogoče po cesti pripeljati od vsake vasi do vsake druge. Potovanje iz ene vasi v drugo lahko poteka preko več vmesnih vasi, vendar po starodavni in nespremenljivi tradiciji celotna pot ne sme meriti več kot M kilometrov.¹ Da se razbojniki ne bi zbirali po samotnih cestnih križiščih, so križišča cest samo v vaseh (ceste se sicer lahko sekajo v puščavi, vendar se v tem primeru zgradi nadvoz, ne križišče).

Ker cene nafte trenutno močno nihajo, so oblastniki previdni in želijo cestno omrežje zgraditi čim ceneje, da le zadošča zgornjim zahtevam. Pri tem jim je v pomoč geografija Daljnistana: država je ravninska in konveksna, tako da lahko med katerimakoli vasema zgradijo popolnoma raven odsek ceste. Cena gradnje je povsod enaka in znaša c evrov na kilometer. Vasi so majhne, zato jih lahko predstavimo kot točke na ravnini s koordinatami (x_i, y_i) (koordinate se merijo v kilometrih).

- (a) Zapiši kot optimizacijsko nalogo.
(b) Ali je naloga vedno rešljiva? Zapiši pogoj za rešljivost.
(c) Kako bi nalogo reševal(a) z lokalno optimizacijo?
2. Na ravnini je danih n točk $T_1 = (x_1, y_1), \dots, T_n = (x_n, y_n)$. Iščemo točko $T = (x, y)$, ki minimizira
- (a) največjo razdaljo do točk T_1, \dots, T_n .
(b) povprečno razdaljo do točk T_1, \dots, T_n .
(c) najmanjšo razdaljo do točk T_1, \dots, T_n .

Katere od nalog (a), (b), (c) so konveksne? Utemelji!

Opomba: razdalja v nalogi je evklidska razdalja: $d(T, T_i) = \sqrt{(x - x_i)^2 + (y - y_i)^2}$.

3. Izpelji po Lagrangeu prirejeno nalogo optimizacijski nalogi (Φ, P, Min) ,

$$P(x, y) = 2(x - y)$$

$$\Phi = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \leq 1\}.$$

Ali sta nalogi dualni?

4. S Karush-Kuhn-Tuckerjevim postopkom reši optimizacijsko nalogo (Φ, P, Min) ,

$$P(x, y, z) = x + z$$

$$\Phi = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid z \geq x^2 + y^2 \wedge z \leq x + y + 2\}.$$

¹M kilometrov je največja razdalja, ki jo kamela opravi z enim napajanjem. Zdaj uporabljajo avtomobile, ampak tradicija je pač tradicija.