1. kolokvij iz OPTIMIZACIJSKIH METOD

25. april 2012

1. V mestu živi n zgovornih prijateljev, ki si redno izmenjujejo najnovejše čenče. Danes je vsak izmed njih izvedel novico, ki je ne ve še noben drug. Ker nimajo časa, da bi se dobili na kavi in čveku, si novice sporočajo kar po telefonu. Ob vsakem klicu si sogovornika izmenjata vse čenče, ki jih poznata (telekonferenc še ne poznajo). Koliko najmanj je potrebno skupaj klicev, da bodo vsi izvedeli vse novice?
   (a) Formulirajte kot optimizacijsko nalogo.
   (b) Najdite čim boljšo zgornjo mejo za vrednost optimalne rešitve pri danem n. (Nasvet: $n = 1, 2, 3$ so posebni primeri. Če najdete optimalno rešitev za $n = 4$ in $n = 5$, boste hitro našli zgornjo mejo za splošen n, za katero se izkaže, da je tudi resnična optimalna rešitev.)
   (c) Najdite čim boljšo spodnjo mejo za vrednost optimalne rešitve pri danem n. Utemeljite, da je to res spodnja meja.
2. Danih je n paroma različnih realnih števil $a_1, \ldots, a_n$ in optimizacijska naloga (Φ, P, Min), kjer je
$$\Phi = S_n,$$
kriterijska funkcija $P : \Phi \to \mathbb{R}$ pa je definirana s predpisom
$$P(\sigma) = \left|\left\{(i,j) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} \,\middle|\, 1 \leq i < j \leq n \wedge a_{\sigma(i)} > a_{\sigma(j)}\right\}\right|$$
   (a) Izračunajte minimalno vrednost kriterijske funkcije. (Nasvet: kako bi opisali rešitev optimizacijske naloge?)
   (b) Na množici Φ definiramo sosednost na naslednji način: permutaciji σ in π sta sosedni, če je $\sigma = \tau\pi$, kjer je τ transpozicija. Dokažite, da je pri tej sosednosti vsak lokalni minimum tudi globalni.
3. Eksperimentalno smo izmerili vrednosti neznane funkcije f v n točkah $x_1, x_2, \ldots, x_n \in \mathbb{R}$ in dobili ustrezne rezultate $y_1, y_2, \ldots, y_n \in \mathbb{R}$. Funkcijo želimo aproksimirati s polinomom 3. stopnje
$$f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$$
Parametre aproksimacije določimo tako, da minimiziramo
   (a) aritmetično sredino absolutnih napak: $\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} |y_i - f(x_i)|$,
   (b) geometrijsko sredino absolutnih napak: $\sqrt[n]{\prod_{i=1}^{n} |y_i - f(x_i)|}$,
   (c) maksimalno absolutno napako: $\max_{i=1,\ldots,n} |y_i - f(x_i)|$.

   Formulirajte vsakega od primerov (a), (b) in (c) kot optimizacijsko nalogo in ugotovite, katere so konveksne. Utemeljite!
4. Občinska uprava gradi nov bazen. Bazen bo imel obliko kvadra s prostornino $V m^3$. Spodnja ploskev in severna stranska ploskev bosta zgrajeni iz betona, cena je $A\,\mathrm{EUR}/m^2$. Vzhodna, zahodna in južna stranska ploskev pa bodo grajene iz stekla (da bo lahko sonce ogrevalo bazensko vodo). Cena steklene stene je $B\,\mathrm{EUR}/m^2$. Izračunajte dolžine stranic bazena, pri katerih bo gradnja najcenejša.