1. kolokvij iz OPTIMIZACIJSKIH METOD

6. maj 2010

1. Na šahovski deski velikosti $n \times n$ je označenih k polj. Na desko želimo postaviti čimmanj trdnjav, ki bodo skupaj napadale vsa označena polja. Vsaka trdnjava napada vsa polja v istem stolpcu ali vrstici (vključno s poljem, na katerem stoji).
   (a) Zapiši kot optimizacijsko nalogo.
   (b) Najdi optimalno rešitev v primeru, ko je n sodo število in so označena natanko vsa črna polja.
   (c) Za dani števili n in k izračunaj najmanjše mogoče število trdnjav, ki lahko pokrijejo k polj na deski $n \times n$. Pri kakšni razvrstitvi označenih polj je ta spodnja meja dosežena?

2. (IŠRM) Naj bo $A \subseteq \mathbb{R}^2$ konveksna množica. Iščemo krog z največjim polmerom, ki ves leži v množici A. Formuliraj nalogo kot *konveksno* optimizacijsko nalogo. (Dokaži, da je konveksna!)

   Nasvet. Uporabi pomožno trditev (ki je ni treba dokazati): če je $A \subseteq \mathbb{R}^2$ konveksna množica, je razdalja do roba A konkavna funkcija na A.

   Dodatna naloga [+10 točk] Dokaži pomožno trditev za primer, ko je A konveksen poligon (t.j. presek končno mnogo polravnin).

2. (FRI) Pri katerih vrednostih parametra a je množica
$$A = \{(x, y) \in \mathbb{R} \,|\, x^2 + ay^2 \leq x + 1\}$$
konveksna?

3. Izpelji po Lagrangeu prirejeno nalogo optimizacijski nalogi (Φ, P, Min),
$$P(x, y) = x^2 + y^2$$
$$\Phi = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \,\middle|\, |x| + |y| \leq 1\right\}.$$
Ali sta nalogi dualni?

4. Reši optimizacijsko nalogo (Φ, P, Min),
$$P(x, y) = 2x^2 + 3y^2$$
$$\Phi = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \,\middle|\, x + y \geq 1 \wedge x \leq 2 \wedge y \leq 2\right\}.$$