1. kolokvij iz OPTIMIZACIJSKIH METOD

4. maj 2011

1. Bogat in ekscentričen stric ti je v oporoki zapustil svoje premoženje. Ker pa je imel čuden smisel za humor, je ves denar in zlatnino (v nadaljevanju: zaklad) zakopal nekje na svojem velikanskem posestvu in v oporoko zapisal navodila za iskanje. Navodila sestavlja n napotkov oblike

   "pojdi natanko d_i metrov po premici z naklonom α_i° glede na smer sever-jug".

   Seznamu napotkov je priložena sledeča obrazložitev.

   - Z iskanjem prični pri vhodu v hišo.
   - Premikaj se samo v skladu z napotki.
   - Vsak napotek upoštevaj največ enkrat.
   - Seznam napotkov ni urejen.
   - Ker premice niso usmerjene, lahko po vsaki hodiš v eno ali drugo smer.
   - Zaklad je zakopan v točki, do katere lahko prideš po teh navodilih in je med vsemi takimi najbolj oddaljena od izhodišča (glede na evklidsko razdaljo).
   - Če je najbolj oddaljenih točk več, je v vsaki zakopan del zaklada.

   Tvoj cilj je seveda ugotoviti, kje je zakopan zaklad.

   (a) Zapiši kot optimizacijsko nalogo.

   (b) Dokaži, da v optimalni rešitvi vedno uporabiš vse napotke.

2. Na ravnini je danih n točk s koordinatami $(x_1, y_1), \ldots, (x_n, y_n)$. Iščemo krog z najmanjšim polmerom, ki vsebuje vseh n točk. Formuliraj kot konveksno optimizacijsko nalogo.

   Nasvet: če nalogo formuliraš kot je napisana, ne bo konveksna, bo pa ekvivalentna neki konveksni optimizacijski nalogi.

3. Izpelji po Lagrangeu prirejeno nalogo optimizacijski nalogi (Φ, P, Min),

$$P(x, y) = ax$$

$$\Phi = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \,\middle|\, x^2 + (y-1)^2 \leq 4 \wedge x^2 + (y+1)^2 \leq 4\right\}.$$

   Ali sta nalogi dualni?

4. Reši optimizacijsko nalogo (Φ, P, Max),

$$P(x, y) = x + y$$

$$\Phi = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \,\middle|\, x^2 + 4y^2 \leq 4 \wedge y \geq x - 1 \wedge y \leq x + 1\right\}.$$