na vrhu

Optimizacijske metode

7. barvanje grafov

Vladimir Batagelj

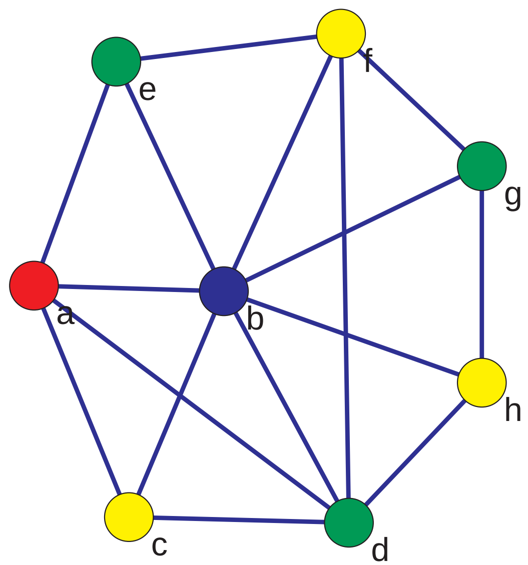
Univerza v Ljubljani

FMF, matematika

različica: 15. april 2014 / 12 : 56

Kazalo

Barvanje grafov



v	a	b	c	d	e	f	g	h
b	1	2	3	4	4	3	4	3

Naj bo $G = (V, E)$ neusmerjen enostaven graf. Preslikavo $b : V \to B$ imenujemo *barvanje*, B je množica *barv*. Barvanje b je *pravilno*, če zadošča pogoju

$$\forall u, v \in V : ((u : v) \in E \Rightarrow b(u) \neq b(v))$$

sosednje točke so različno pobarvane.
Število $\chi(G, b) = |b(V)|$ v barvanju b uporabljenih barv imenujemo *barvitost* barvanja b. Najmanjšo barvitost med pravilnimi barvanji grafa G imenujemo *barvnost* grafa G

$$\chi(G) = \min_{b \text{ je pravilno barvanje}} \chi(G, b)$$

Barvanja grafov – primeri

Naloga o barvanju točk grafa sodi v seznam "osnovnih" kombinatoričnih nalog, saj lahko nanjo prevedemo celo vrsto, navidez neprimerljivih, nalog. Poglejmo si dva primera:

Radijski oddajniki. Radijska oddajnika lahko motita eden drugega, če sta si preblizu. Kako razdeliti valovne dolžine dani množici oddajnikov, tako da se ne bodo medsebojno motili? Koliko najmanj valovnih dolžin je za to potrebnih?

Prevod: *točke grafa:* oddajniki; *povezave:* oddajnika sta sosednja, če sta si preblizu (lahko motita eden drugega); *barve:* valovne dolžine.

Turistični vodiči. Turistična agencija namerava organizirati n izletov. Za vsak izlet i poznamo datum njegovega začetka Z_i in datum njegovega konca K_i. Koliko (najmanj) vodičev je potrebnih za izvedbo teh izletov? Katere izlete bo vodil posamezni vodič?

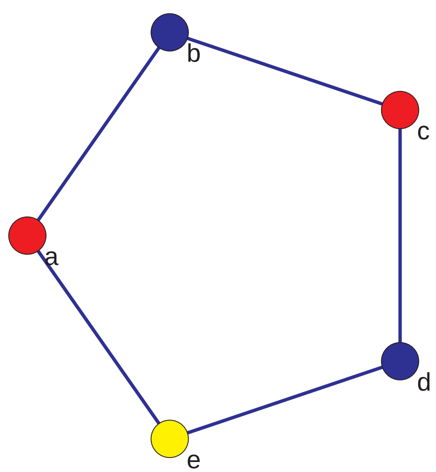
Prevod: *točke grafa:* izleti (oziroma skupine, če je za isti izlet predvidenih več vodičev); *povezave:* izlet i je povezan z izletom j natanko takrat, ko je: $(Z_i, K_i) \cap (Z_j, K_j) \neq \emptyset$; *barve:* vodiči.

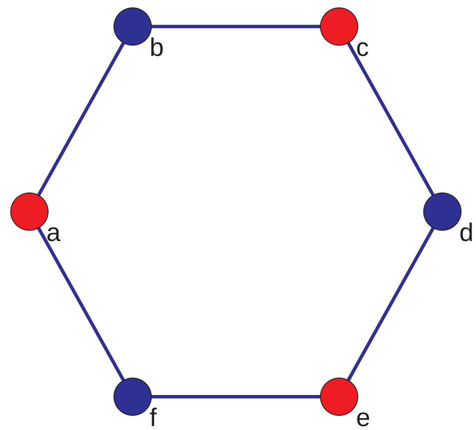
Lastnosti barvnosti

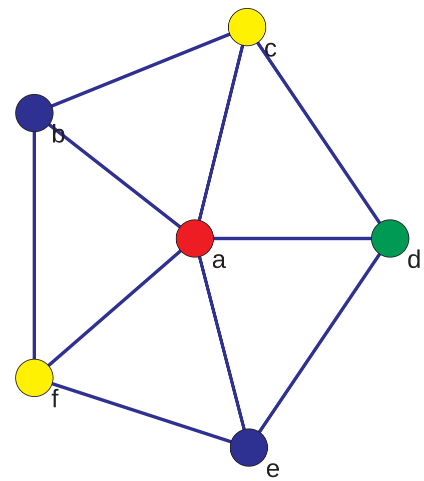
- $\chi(K_n) = n$
- Naj bo G graf z vsaj eno povezavo, ki ne vsebuje lihih ciklov. Tedaj je $\chi(G) = 2$.
- Naj bo H podgraf grafa G, $H \subseteq G$. Tedaj je $\chi(H) \leq \chi(G)$.
- Naj bo $G = \bigcup_{i \in I} G_i$, kjer so G_i komponente povezanosti grafa G. Tedaj je
$$\chi(G) = \max_{i \in I} \chi(G_i)$$

Za določanje barvnosti danega grafa ni poznan noben učinkovit (polinomske zahtevnosti) postopek – še več, velja domneva, da tak postopek sploh ne obstaja.

Lastnosti barvnosti







$$\chi(C_{2k}) = 2 \qquad \chi(C_{2k+1}) = 3 \qquad \chi(W_{2k}) = 4 \qquad \chi(W_{2k+1}) = 3$$

Postopek Zykova

Za manjše grafe (do nekaj 10 točk) lahko za določitev barvnosti uporabimo rekurzivni prebor možnosti, ki temelji na zvezi Zykova: Bodita u in v točki, ki nista krajišči iste povezave – $(u : v) \notin E$. Tedaj je

$$\chi(G) = \min(\ \chi(G(u = v)),\ \chi(G \cup \{(u : v)\})\ )$$

kjer je $G(u = v)$ graf, ki ga dobimo, če v grafu G združimo točki u in v v eno točko (pri tem morebitne večkratne povezave nadomestimo z enkratnimi), in je $G \cup \{(u : v)\}$ graf, ki ga dobimo, če grafu G dodamo povezavo $(u : v)$.

Graf $G(u = v)$ ustreza primeru, ko sta v minimalnem barvanju točki u in v enako pobarvani, graf $G \cup \{(u : v)\}$ pa primeru, ko sta različno pobarvani.

Rekurzivni prebor se izteče, ker se pri grafih $G(u = v)$ zmanjša število točk, pri grafih $G \cup \{(u : v)\}$ pa poveča število povezav (postajajo vse bolj polni). Razgradnja se ustavi na polnih grafih, za katere barvnosti poznamo.

Hedetniemijevi pravili

Tako dobimo drevo razgradnje, katerega točke so grafi, listi pa polni grafi. Stopnja polnega grafa – lista je enaka številu barv v barvanju, ki ga določa pot po drevesu od vrha do lista.

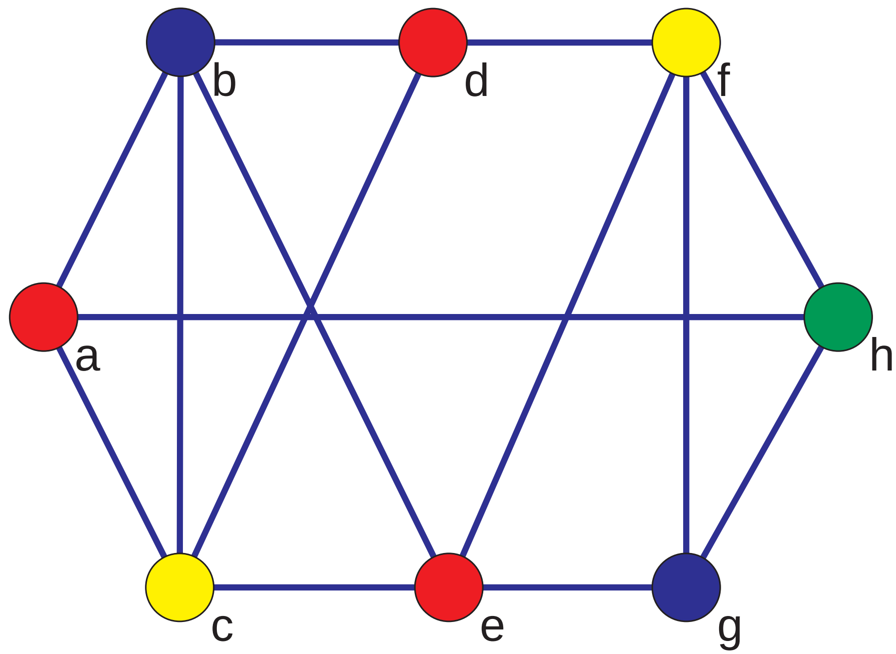
Posamezni postopki se razlikujejo v načinu pregledovanja tega drevesa in v pravilih odmetavanja neobetavnih vej. Za zelo učinkovita sta se izkazali naslednji, sicer preprosti, *Hedetniemijevi pravili*:

P1. če v grafu obstaja točka u, ki je sosedna z vsemi ostalimi, potem bo v vsakem barvanju točka u imela barvo drugačno od vseh drugih točk.

P2. če v grafu obstajata točki u in v, taki da si vsi sosedi točke u tudi sosedi točke v, potem obstaja minimalno barvanje grafa, v katerem sta obe točki enako pobarvani.

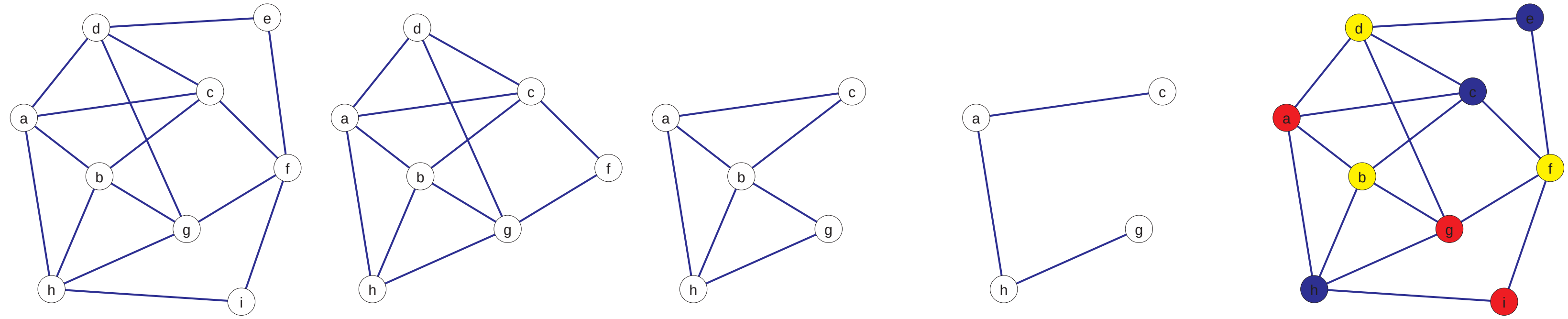
Obe pravili omogočata, da točko u "izločimo" iz grafa – nadaljnjega pregledovanja.

Primer 1



Uporabimo pravilo Zykova na točkah e in h. V obeh primerih dobimo nov graf, ki vsebuje polni graf na 4 točkah K_4. Ker oba ta grafa lahko pobarvamo s 4 barvami, je barvnost začetnega grafa 4.

Primer 2



P2

$N(e) \subseteq N(c)$

$\Rightarrow b(e) = b(c)$

$N(i) \subseteq N(g)$

$\Rightarrow b(i) = b(g)$

P2

$N(f) \subseteq N(b)$

$\Rightarrow b(f) = b(b)$

$N(d) \subseteq N(b)$

$\Rightarrow b(d) = b(b)$

P1

$b(b) = 1$

dvodelni graf

$b(c) = 2,$

$b(a) = 3,$

$b(h) = 2,$

$b(g) = 3$

$b(d) = 1,$

$b(f) = 1,$

$b(i) = 3,$

$b(e) = 2$

Približna barvanja

Kaj pa, če je graf prevelik ali pa je cena za iskanje minimalnega barvanja s postopkom prebora prevelika? Tedaj se moramo zateči k približnim postopkom barvanja in se s tem odpovedati zagotovilu, da je dobljeno barvanje minimalno; čeprav lahko slednje včasih pokažemo, na primer tako da najdemo polni podgraf na $\chi(G)$ točkah.

Večina približnih postopkov za barvanje točk grafa zadošča shemi postopkov zaporednega barvanja.

Naj bo B množica barv. Z $* \notin B$ označimo dodatno barvo *nepobarvano*. *Delno* barvanje imenujemo vsako preslikavo $b : V \to B \cup \{*\}$, ki zadošča pogoju

$$\forall u, v \in V : ((u : v) \in E \wedge b(u), b(v) \in B \Rightarrow b(u) \neq b(v))$$

Postopki zaporednega barvanja

Množica *prostih* barv v točki v za delno barvanje b je tedaj $B(v;b) = B \setminus b(\text{ext}(E(v)) \setminus \{v\})$. Pobarvanje točke v z barvo a v delnem barvanju b pa lahko opišemo z operacijo:

$$S(v,a;b)(u) = \begin{cases} a & u = v \\ b(u) & u \neq v \end{cases}$$

S temi pojmi lahko opišemo *postopke zaporednega barvanja* takole:

> **for all** $v \in V$ **do** $b(v) := *$;
> **while** $\exists v : b(v) = *$ **do begin**
>   izberi prosto barvo $a \in B(v;b)$;
> $b := S(v,a;b)$
> **end**;

Za to, da bi opisani postopek vedno tekel, mora biti vseskozi $B(v;b) \neq \emptyset$. Za to zadostuje, če je $\text{card}(B) = \Delta(G) + 1$.

... Postopki zaporednega barvanja

Linearno uredimo množico B. Barvanje b je *zbito* za dano urejenost barv, če za vsako točko v velja, da ni med zanjo prostimi barvami nobene manjše od barve točke v

$$a \in B(v; b) \Rightarrow b(v) < a$$

Vsako barvanje lahko zbijemo tako, da postopoma v točkah, ki ne zadoščajo temu pogoju opravimo zameno $b := S(v, a; b)$, kjer je a najmanjša barva iz $B(v; b)$. Barvitost barvanja b se pri tem kvečjemu manjša.

Postopki zaporednega barvanja se med seboj razlikujejo po pravilu izbire naslednjega kandidata za barvanje in po načinu izbire barve, s katero ga pobarvamo.

Izbira proste barve

Kako izberemo prosto barvo? Običajno ne razmetavamo z barvami in jih zato raje po potrebi dodajamo. Torej:

- če za dano točko obstaja prosta barva, izberemo eno izmed njih: najmanjšo, kar da zbito barvanje; ali naključno, kar omogoča večkratno poskušanje; ali pa najmanjkrat uporabljeno, kar da razmeroma enakomerno pobarvan graf;
- če ima točka sosede vseh dotlej uporabljenih barv, dopolnimo množico barv z novo barvo. Včasih se temu lahko izognemo, tako da s Kempejevimi premenami (premene dveh barv) sprostimo neko barvo na sosedih dane točke.

Vsakemu zaporednemu barvanju ustreza zaporedje $\pi : 1..n \to V$ izbir točk, ki popisuje vrstni red barvanja. To zaporedje je v bistvu permutacija točk.

Izrek

IZREK 1 *Za vsak graf G obstaja tako zaporedje barvanja π, da da ustrezno zaporedno barvanje, pri čemer vselej izberemo najmanjšo prosto barvo, minimalno zbito barvanje točk danega grafa.*

Dokaz: Naj bo b zbito minimalno barvanje grafa G. Uredimo točke grafa po naraščajočih vrednostih pripadajočih barv. Dobili smo iskano zaporedje.

□

Torej je osnovno vprašanje pri zaporednih postopkih barvanja: Kako najti "ta pravi" vrstni red barvanja ?

Welsh-Powellov postopek

*Welsh-Powell*ov postopek temelji na naslednjem pravilu: vrstni red barvanja je določen s padajočim vrstnim redom stopenj točk grafa. Za Welsh-Powellov postopek je mogoče pokazati oceno.

IZREK 2 *Naj bo $d_1 \geq d_2 \geq d_3 \ldots \geq d_n$ padajoče zaporedje stopenj točk grafa G. Tedaj je*

$$\chi(G) \leq \mathrm{WP}(G) \leq \max\{i : i \leq d_i + 1\}$$

Brélazov postopek

Pri *Brélaz*ovem postopku je vrstni red barvanja π določen takole:

> vse točke imajo vrednost 0;
> točki, ki ima največjo stopnjo, postavi vrednost na 1;
> **for** $i := 1$ **to** n **do begin**
> $\pi(i) :=$ točka z največjo vrednostjo, ki še ni v π;
>   vsem sosedom točke $\pi(i)$ povečaj vrednost za 1
> **end**;

Brélazov postopek temelji na pravilu takojšnjega barvanja poln(ejš)ih podgrafov. Zanj je mogoče pokazati trditev.

IZREK 3 *Brélazov postopek je točen za dvodelne grafe.*

Zanimiv, a nekoliko zapletenejši, je tudi *Szekeres-Wilf*ov postopek.