na vrhu

Optimizacijske metode

4. Konveksne naloge

Vladimir Batagelj

Univerza v Ljubljani

FMF, matematika

Kazalo

Konveksne množice in funkcije

Naj bo Ω množica in $d : \Omega \times \Omega \to \mathbb{R}_0^+$ *različnost* na Ω – zadošča pogojema:

d1. $d(x, x) = 0$

d2. $d(x, y) = d(y, x)$

Poleg tega bomo zahtevali, da zadošča vsaj še pogoju

d3'. $d(x, y) = 0 \Rightarrow \forall z \in \Omega : d(x, z) = d(y, z)$

Različnosti, ki zadošča tudi pogojema

d3. $d(x, y) = 0 \Rightarrow x = y$ – *razločljivost*

d4. $d(x, z) + d(z, y) \geq d(x, y)$ – *trikotniška neenakost*

pravimo *razdalja*.

Velja tudi d3 $\Rightarrow$ d3'.

Konveksnost – daljice

Daljica v (Ω, d) s *krajiščema* $x, y \in \Omega$ imenujemo množico

$$[x, y] = \{z \in \Omega : d(x, z) + d(z, y) = d(x, y)\}$$

Postavimo

$$[x] = \{z \in \Omega : d(x, z) = 0\}$$

Velja $d(x, y) = 0 \Rightarrow [x] = [y]$.

Vpeljemo lahko še $(x, y] = [x, y] \setminus [x]$ in $(x, y) = [x, y] \setminus ([x] \cup [y])$. Če d zadošča d3, je $[x] = \{x\}$.

Velja: $\{x, y\} \subseteq [x, y]$, $[x] \subseteq [x, y]$, $[x, y] = [y, x]$ in $d(x, z) = 0 \Rightarrow [x, y] = [z, y]$.

... Konveksnost – daljice

Na stvar lahko pogledamo tudi takole. Naj bo relacija $\simeq \subset \Omega \times \Omega$ določena s predpisom

$$x \simeq y \;\Leftrightarrow\; d(x, y) = 0$$

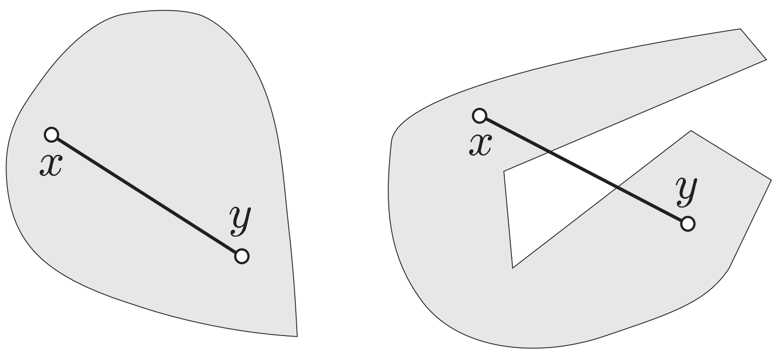
$\simeq$ je enakovrednost (ekvivalenčna relacija). Po d3' je funkcija $d/\simeq$ dobro definirana na $\Omega/\simeq$; še več, je razločljiva na $\Omega/\simeq$.

IZREK 1 $(x, y) \neq \emptyset \Rightarrow d(x, y) > 0$

Dokaz: Naj bo $z \in (x, y)$. Tedaj po definiciji množice (x, y) velja $d(x, z) > 0$ in $d(z, y) > 0$ in je zato tudi $d(x, y) = d(x, z) + d(z, y) > 0$.

$\square$

Konveksnost množic



Konveksna in nekonveksna množica

Množica $\Phi \subseteq \Omega$ je *konveksna* (izbočena) natanko takrat, ko velja

$$\forall x, y \in \Phi : [x, y] \subseteq \Phi$$

Kadar želimo posebej poudariti, da je množica konveksna glede na različnost d, rečemo, da je *d-konveksna*.

Prazna množica $\emptyset$ je konveksna.

. . . Konveksnost množic

IZREK 2 *Presek konveksnih množic je konveksna množica.*

Dokaz: Vzemimo poljubno družino konveksnih množic $\{\Phi_i\}_{i\in I}$. Če je $\bigcap_{i\in I}\Phi_i = \emptyset$, je presek konveksna množica. Sicer vzemimo poljubna $x, y \in \bigcap_{i\in I}\Phi_i$. Po definiciji preseka je tedaj za vsak $i \in I$: $x, y \in \Phi_i$ in dalje zaradi konveksnosti množice Φ_i tudi $[x, y] \subseteq \Phi_i$. Od tu pa zopet po definiciji preseka končno dobimo $[x, y] \subseteq \bigcap_{i\in I}\Phi_i$. Presek je konveksna množica. $\square$

Konveksnost in skoraj konveksnost funkcij

Funkcija $P : \Phi \to \mathbb{R}$ na konveksni množici Φ je *konveksna* natanko takrat, ko velja:

$$\forall x, y \in \Phi : (d(x, y) = 0 \Rightarrow P(x) = P(y))$$

(za razločljive različnosti vselej velja) in

$$\forall x, y \in \Phi \forall z \in (x, y) : (d(x, y)P(z) \le d(y, z)P(x) + d(x, z)P(y))$$

Če v drugem pogoju velja strogi neenačaj $<$, je P *strogo konveksna*.

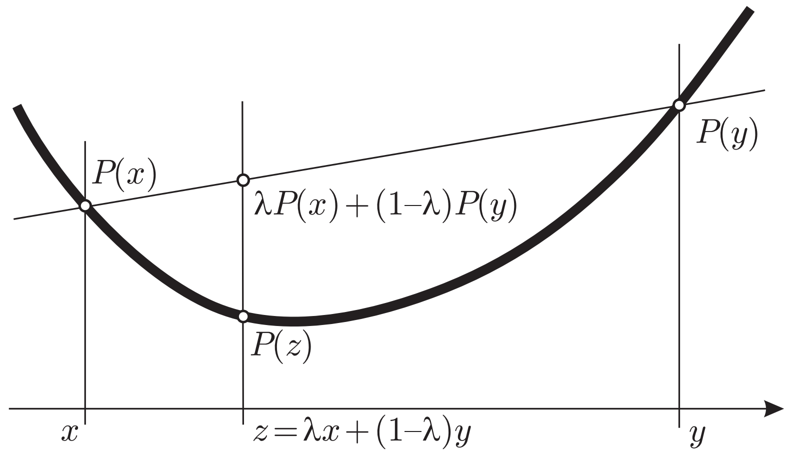
Funkcija $P : \Phi \to \mathbb{R}$ na konveksni množici Φ je *skoraj konveksna* natanko takrat, ko velja prvi pogoj in:

$$\forall x, y \in \Phi \forall z \in (x, y) : P(z) \le \max(P(x), P(y))$$

Če v pogoju velja strogi neenačaj $<$, je P *strogo skoraj konveksna*.

Funkcija $P : \Phi \to \mathbb{R}$ na konveksni množici Φ je (strogo, skoraj) *konkavna* natanko takrat, ko je funkcija $-P$ (strogo, skoraj) konveksna.

Navadna konveksnost



O *navadni* konveksnosti govorimo v primeru, ko je Ω vektorski prostor s skalarnim produktom (x, y). Na primer $\Omega = \mathbb{R}^n$ in $(x, y) = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i$. Tedaj definiramo *razdaljo* $d(x, y) = \sqrt{(x - y)^2}$. Zanjo je

$$[x, y] = \{z : z = \lambda x + (1 - \lambda)y, \lambda \in [0, 1]\}$$

pogoj za *konveksnost* funkcije pa zapišemo

$$P(\lambda x + (1 - \lambda)y) \leq \lambda P(x) + (1 - \lambda)P(y), \quad \lambda \in (0, 1)$$

Konveksna funkcija na odprti konveksni množici v $\mathbb{R}^n$ je zvezna.

Lastnosti konveksnih funkcij

IZREK 3 *Vsaka (strogo) konveksna funkcija je tudi (strogo) skoraj konveksna funkcija.*

Dokaz: Vzemimo poljuben par $x, y \in \Phi$ in katerikoli $z \in (x, y)$. Tedaj je $d(x, y) > 0$ in zato

$$\begin{aligned} P(z) &\leq \frac{d(y,z)P(x) + d(x,z)P(y)}{d(x,y)} \\ &\leq \frac{d(y,z) + d(x,z)}{d(x,y)} \max(P(x), P(y)) \\ &= \max(P(x), P(y)) \end{aligned}$$

če je funkcija P strogo konveksna, je prva neenakost stroga. □

IZREK 4 *Naj bo $P : \Phi \to \mathbb{R}$ (strogo) konveksna funkcija na konveksni množici Φ. Tedaj velja:*

a. $\lambda P(x) + \mu,\ \lambda, \mu \in \mathbb{R},\ \lambda > 0$ *je (strogo) konveksna funkcija na* Φ*;*

b. *naj bo še* $\tau : \Psi \to \mathbb{R}$, $P(\Phi) \subseteq \Psi \subseteq \mathbb{R}$, *(strogo) naraščajoča konveksna funkcija na* Ψ*. Funkcija* $\tau \circ P$ *je (strogo) konveksna na* Φ*.*

. . . Lastnosti konveksnih funkcij

Dokaz: b. $u \leq v \Rightarrow \tau(u) \leq \tau(v)$

$$\begin{aligned}
\tau \circ P(z) &= \\
\tau(P(z)) &\leq \tau\left(\frac{d(y,z)}{d(x,y)} P(x) + \frac{d(x,z)}{d(x,y)} P(y)\right) \\
&\leq \frac{d(y,z)}{d(x,y)} \tau(P(x)) + \frac{d(x,z)}{d(x,y)} \tau(P(y)) \\
&= \frac{d(y,z)}{d(x,y)} \tau \circ P(x) + \frac{d(x,z)}{d(x,y)} \tau \circ P(y)
\end{aligned}$$

□

IZREK 5 *Naj bodo* $P_i : \Phi \to \mathbb{R},\ i \in I = 1..n$ *konveksne funkcije na konveksni množici* Φ. *Tedaj so konveksne tudi funkcije:*

a. $\sum_{i \in I} \lambda_i P_i(x),\ \lambda_i \geq 0$

b. $\max_{i \in I} P_i(x)$

c. $\max_{i \in I}(0, P_i(x))$

Skoraj konveksne omejitve

IZREK 6 *Naj* $P : \Omega \to \mathbb{R}$ *skoraj konveksna funkcija. Tedaj je množica*

$$\Phi = \{x \in \Omega : P(x) \leq 0\}$$

konveksna.

Dokaz: Pokazati moramo, da je za vsak par različnih točk $x, y \in \Phi$ tudi pripadajoča daljica $[x, y] \subseteq \Phi$; oziroma, da je za vsak $z \in (x, y) : z \in \Phi$.

Po definiciji množice Φ sta $P(x) \leq 0$ in $P(y) \leq 0$ in zato naprej, po definiciji skoraj konveksnosti $P(z) \leq \max(P(x), P(y)) \leq 0$. Torej je res tudi $z \in \Phi$. $\square$

Opomba: na enak način pokažemo, da je tudi množica $\{x \in \Omega : P(x) < 0\}$ konveksna.

Torej je množica dopustnih rešitev določena s skoraj konveksnimi omejitvami konveksna.

Plasti funkcij in skoraj konveksnost

Plast funkcije $P : \Phi \to \mathbb{R}$ na *višini* h imenujemo množico

$$\text{Lev}\,(P, h) = \{x \in \Phi : P(x) \leq h\}$$

IZREK 7 *Naj bo Φ konveksna množica. Tedaj je funkcija $P : \Phi \to \mathbb{R}$ skoraj konveksna natanko takrat, ko je za vsak $h \in \mathbb{R}$ plast* Lev (P, h) *konveksna množica.*

Dokaz: Naj bosta $x, y \in \text{Lev}\,(P, h)$ poljubni, različni točki. Tedaj je $P(x), P(y) \leq h$ in dalje za vsak $z \in (x, y)$

$$P(z) \leq \max(P(x), P(y)) \leq h$$

Torej je tudi $z \in \text{Lev}\,(P, h)$ – množica Lev (P, h) je konveksna.

Vzemimo sedaj poljubna $x, y \in \Phi$ in postavimo $h = \max(P(x), P(y))$. Tedaj sta $x, y \in \text{Lev}\,(P, h)$. Ker je po predpostavki množica Lev (P, h) konveksna, je tudi $[x, y] \subseteq \text{Lev}\,(P, h)$ – torej velja

$$\forall z \in (x, y) : P(z) \leq h = \max(P(x), P(y))$$

Funkcija P je skoraj konveksna. $\square$

Dobra sosednost in konveksne naloge

Sosednost $S \subseteq \Omega \times \Omega$ je *dobra* za konveksno množico Φ natanko takrat, ko velja

$$\forall x \in \Phi \, \forall y \in \Phi \setminus S(x) \, \exists z \in S(x) \cap (x, y)$$

Optimizacijska naloga (Φ, P, Min) je *konveksna*, če sta Φ in P konveksni. Pomen konveksnosti pri optimizaciji razkriva naslednji izrek:

Konveksnost in lokalna optimizacija

IZREK 8 *Za dobro sosednost je vsak lokalni minimum konveksne naloge tudi globalni.*

Dokaz: Naj bo x lokalni minimum za neko dobro sosednost S. Tedaj je $\forall z \in S(x) \cap \Phi$: $P(z) \geq P(x)$. če je $S(x) \cap \Phi = \Phi$, trditev velja. Sicer vzemimo katerikoli drug $y \in \Phi \setminus S(x)$ in pokažimo, da je $P(x) \leq P(y)$. Predpostavimo nasprotno $\exists y \in \Phi \setminus S(x) : P(x) > P(y)$. Ker je $P(x) > P(y)$, je $d(x, y) > 0$. Naj bo $z \in (x, y) \cap S(x)$ element iz definicije dobre sosednosti. Tedaj je

$$\begin{aligned} P(z) &\leq \frac{d(y,z)}{d(x,y)} P(x) + \frac{d(x,z)}{d(x,y)} P(y) \\ &< \frac{d(y,z)}{d(x,y)} P(x) + \frac{d(x,z)}{d(x,y)} P(x) = P(x) \end{aligned}$$

Stroga neenakost izhaja iz predpostavke $P(y) < P(x)$ in $d(x, z) > 0$.

Torej lahko vselej najdemo tak $z \in (x, y) \cap S(x)$, da je $P(z) < P(x)$; kar pomeni, da x ni lokalni minimum – protislovje. □

Ta izrek zagotavlja, da je za konveksne naloge postopek lokalne optimizacije, če se izteče v končno korakih, točen.

Stroga skoraj konveksnost in lokalna optimizacija

IZREK 9 *Naj bo funkcija $P : \Phi \to \mathbb{R}$ strogo skoraj konveksna nad konveksno množico Φ in naj bo x lokalni minimum za dobro sosednost $S \subseteq \Omega \times \Omega$. Tedaj je $x \in \mathrm{Min}(\Phi, P)$.*

Dokaz: Dokazujemo s protislovjem. Ker je x lokalni minimum, velja

$$\forall y \in S(x) \cap \Phi : P(x) \leq P(y)$$

Recimo, da $x \notin \mathrm{Min}(\Phi, P)$. Tedaj obstaja tak $z \in \Phi$, da je $P(z) < P(x)$. Ker je sosednost S dobra, obstaja vsaj en $y \in (x, z) \cap S(x)$, za katerega, ker je $y \in S(x) \cap \Phi$, velja $P(x) \leq P(y)$. Po drugi strani je zaradi stroge skoraj konveksnosti

$$P(y) < \max(P(z), P(x)) = P(x)$$

kar da, če združimo obe neenakosti, protislovje $P(y) < P(y)$. $\square$

Konveksnost množice minimalnih rešitev

IZREK 10 *Naj bo funkcija $P : \Phi \to \mathbb{R}$ skoraj konveksna nad konveksno množico Φ, tedaj je tudi množica $\mathrm{Min}(\Phi, P)$ konveksna.*

Dokaz: Vzemimo poljubna različna $x, y \in \mathrm{Min}(\Phi, P)$. Tedaj je $P(x) = P(y) = \min(\Phi, P)$ in za vsak $z \in (x, y)$

$$P(z) \leq \max(P(x), P(y)) = \min(\Phi, P)$$

Torej je $P(z) = \min(\Phi, P)$ oziroma $z \in \mathrm{Min}(\Phi, P)$. □

Konveksna ovojnica

Naj bo $\Gamma \subseteq \Omega$. *(Induktivna) konveksna ovojnica* množice Γ imenujemo množico $\text{con}\,\Gamma$, ki je določena induktivno s praviloma:

con 1. $\quad \Gamma \subseteq \text{con}\,\Gamma$

con 2. $\quad x, y \in \text{con}\,\Gamma \Rightarrow [x, y] \subseteq \text{con}\,\Gamma$

Iz pravila con 2 izhaja, da je $\text{con}\,\Gamma$ konveksna množica. Obratno, če je Γ konveksna množica, je $\text{con}\,\Gamma = \Gamma$.

…Konveksna ovojnica

IZREK 11 *Naj bo za množico* $\Gamma \subseteq \Phi$, $\mathrm{con}\,\Gamma \subseteq \Phi$ *in* P *skoraj konveksna funkcija na* Φ. *Tedaj je*

$$\forall z \in \mathrm{con}\,\Gamma : P(z) \leq \sup_{w\in\Gamma} P(w)$$

Dokaz: Dokazujemo z induktivno posplošitvijo. če je $z \in \Gamma$, je trditev očitna. Pokažimo še, da pravilo con 2 ohranja neenakost. Po induktivni predpostavki za $x, y \in \mathrm{con}\,\Gamma$ trditev velja

$$P(x), P(y) \leq \sup_{w\in\Gamma} P(w)$$

Tedaj je po skoraj konveksnosti funkcije p tudi za vsak $z \in [x, y]$

$$P(z) \leq \max(P(x), P(y)) \leq \sup_{w\in\Gamma} P(w)$$

Po induktivni posplošitvi neenakost velja za vsak $z \in \mathrm{con}\,\Gamma$. □

Osnova konveksne množice

Množica $\Gamma \subseteq \Phi$ *razpenja* konveksno množico Φ natanko takrat, ko velja $\mathrm{con}\,\Gamma = \Phi$. Množica $\Gamma \subseteq \Phi$ je *neodvisna* natanko takrat, ko zanjo velja $\forall x \in \Gamma : x \notin \mathrm{con}\,(\Gamma \setminus \{x\})$. Nedvisno množico B, ki razpenja množico Φ, imenujemo *osnova* ali *baza* množice Φ.

Iz zadnjega izreka neposredno izhaja.

IZREK 12 *Naj bo $B \subseteq \Phi$ osnova konveksne množice Φ in $P : \Phi \to \mathbb{R}$ skoraj konveksna funkcija. Teda je*

$$\forall z \in \Phi : P(z) \leq \sup_{w \in B} P(w)$$

Točka $z \in \Phi$ je *skrajna* točka konveksne množice Φ natanko takrat, ko velja $\neg\exists x, y \in \Phi : z \in (x, y)$.

Vsaka osnova množice Φ vsebuje vse njene skrajne točke.

Običajna konveksnost

V tem razdelku si bomo ogledali nekatere posebnosti, ki veljajo za *običajno konveksnost* – primer, ko je Ω vektorski prostor (npr. $\Omega = \mathbb{R}^n$).

Iz pogoja za običajno konveksnost množice $\Phi \subseteq \Omega$

$$\forall x, y \in \Phi \; \forall\lambda \in (0,1) : \lambda x + (1-\lambda)y \in \Phi$$

izhaja:

IZREK 13 *Naj bo Φ konveksna množica, $x_k \in \Phi, \lambda_k \geq 0, k \in 1..n$ in $\sum \lambda_k = 1$. Tedaj je tudi $\sum \lambda_k x_k \in \Phi$.*

$\sum \lambda_k x_k$ je konveksna ovojnica.

…Običajna konveksnost

IZREK 14 *(Krein – Milman) Kompaktna konveksna množica v* $\mathbb{R}^n$ *je konveksna ovojnica svojih skrajnih točk.*

IZREK 15 *Za konveksno množico* Φ *je za vsak* $\varepsilon > 0$ *sosednost* $S(\varepsilon)$ *dobra.*

Dokaz: Naj bo $x \in \Phi$ in $y \in \Phi \setminus S(\varepsilon)(x)$. Tedaj je množica $\{z : z \in (x, y) \wedge 0 < d(x, z) < \varepsilon\}$ vselej neprazna. $\square$

Jensenova neenakost

Iz pogoja za konveksnost funkcije $P : \Phi \to \mathbb{R}$ na konveksni množici Φ:
$\forall x, y \in \Phi \, \forall \lambda \in (0, 1)$:

$$P(\lambda x + (1 - \lambda)y) \leq \lambda P(x) + (1 - \lambda)P(y)$$

dobimo

IZREK 16 (Jensenova neenakost). *Naj bo P konveksna funkcija na konveksni množici Φ. Tedaj za poljubne $\lambda_i \geq 0,\ i \in I = 1..n$, $\sum_{i \in I} \lambda_i = 1$ in $x_i \in \Phi$ velja neenakost*

$$P(\sum_{i \in I} \lambda_i x_i) \leq \sum_{i \in I} \lambda_i P(x_i)$$

če je P strogo konveksna in so $\lambda_i > 0$, velja enakost natanko takrat, ko so vsi x_i med seboj enaki.

Uporaba Jensenove neenakosti

Ker je funkcija $-\ln x$ strogo konveksna in strogo padajoča na $\mathbb{R}^+$, po Jensenovi neenakosti dobimo znamenito neenakost med aritmetično in geometrično sredino

$$\frac{1}{n}\sum_{i\in I} a_i \geq \sqrt[n]{\prod_{i\in I} a_i}$$

kjer so $a_i \in \mathbb{R}^+,\ i \in I$.

Izreki o konveksnosti

Iz analize poznamo naslednje izreke o konveksnih funkcijah:

IZREK 17 *če je funkcija $P : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ zvezno odvedljiva, je konveksna na Φ natanko takrat, ko velja:*

$$\forall x, y \in \Phi : P(y) \geq P(x) + \nabla P^T(x)(y - x)$$

kjer je $\nabla P(x) = [\frac{\partial P(x)}{\partial x_i}]$ gradient funkcije P; in če je dvakrat zvezno odvedljiva, je konveksna natanko takrat, ko je Hessova matrika

$$\nabla^2 P(x) = H(P, x) = [\frac{\partial^2 P}{\partial x_i \partial x_j}]$$

v vsaki točki $x \in \Phi$ pozitivno semi-definitna

$$\forall y \in \mathbb{R}^n : y^T \nabla^2 P(x) y \geq 0$$

Sylvesterov izrek

Pri preverjanju pozitivne (semi-)definitnosti se opremo na Sylvesterov izrek:

IZREK 18 *Kvadratna simetrična matrika* $A = [a_{i,j}] \in \mathbb{R}^{n\times n}$ *je pozitivno definitna natanko takrat, ko so vsi glavni minorji te matrike*

$$\Delta_k = \begin{vmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \cdots & a_{1,k} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \cdots & a_{2,k} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{k,1} & a_{k,2} & \cdots & a_{k,k} \end{vmatrix} \qquad k = 1, \ldots, n$$

pozitivni. Če so $\Delta_k > 0$, $k = 1, 2, \ldots, n-1$ *in* $\Delta_n = 0$, *je matrika* A *pozitivno semi-definitna.*

in izrek

Lastne vrednosti in pozitivna (semi-)definitnost

IZREK 19 *Kvadratna simetrična matrika* $A = [a_{i,j}] \in \mathbb{R}^{n \times n}$ *je*

a. *pozitivno definitna natanko takrat, ko so vse njene lastne vrednosti pozitivne;*

b. *pozitivno semi-definitna natanko takrat, ko so vse njene lastne vrednosti nenegativne;*

Primer

Pokažimo, da je funkcija

$$P(x, y) = 4x^2 + y^2 - 2xy$$

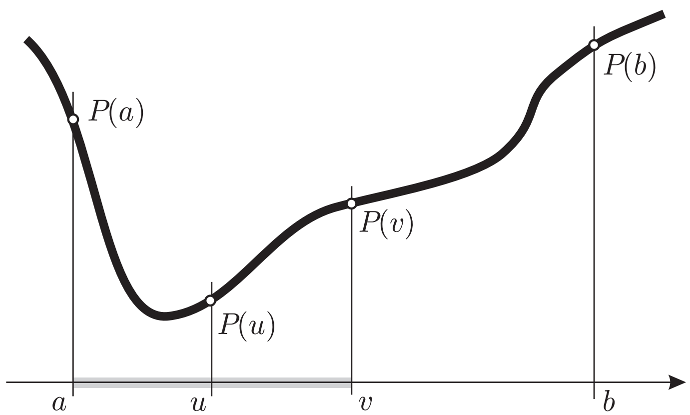
konveksna na $\mathbb{R}^2$.

Pripadajoča Hessova matrika

$$H(P, (x, y)) = 2 \begin{bmatrix} 4 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$$

je konstantna. Glavna minorja $\Delta_1 = 4$ in $\Delta_2 = 4 \cdot 1 - (-1) \cdot (-1) = 3$ sta pozitivna v vsaki točki $(x, y) \in \mathbb{R}^2$. Torej je P res konveksna na $\mathbb{R}^2$.

Unimodalne funkcije



Funkcija $P : [a, b] \to \mathbb{R}$ je *strogo unimodalna* na intervalu $[a, b]$, če obstaja $c \in [a, b]$, tako da velja

$$\forall x, y \in [a, c] : (x < y \Rightarrow P(x) > P(y))$$

in

$$\forall x, y \in [c, b] : (x < y \Rightarrow P(x) < P(y))$$

Očitno za tako funkcijo velja $\mathrm{Min}([a, b], P) = \{c\}$.

IZREK 20 *Naj bo P strogo unimodalna na $[a, b]$ in $x, y \in [a, b]$, $x < y$. Tedaj velja*

$$P(x) \le P(y) \Rightarrow c < y \qquad \text{in} \qquad P(x) \ge P(y) \Rightarrow c > y$$

...Unimodalne funkcije

Dokaz: Pokažimo prvi del trditve. Prvi pogoj iz definicije stroge unimodalnosti $y \leq c \Rightarrow P(x) > P(y)$, če upoštevamo $p \Rightarrow q \sim \neg q \Rightarrow \neg p$, dobi iskano obliko $P(x) \leq P(y) \Rightarrow c < y$. □

Obstaja več postopkov iskanja minimuma strogo unimodalne funkcije $P(x)$ na intervalu $[a, b]$. Večina jih temelji na naslednjem razmisleku. Izberimo znotraj intervala $[a, b]$ še dve različni točki u in v, $u < v$ in označimo z x^* rešitev naloge $([a, b], P, \mathrm{Min})$. Tedaj nastopijo po pravkar dokazani trditvi naslednje možnosti

a. $P(u) < P(v) \Rightarrow x^* < v$ b. $P(u) > P(v) \Rightarrow x^* > u$

c. $P(u) = P(v) \Rightarrow u < x^* < v$

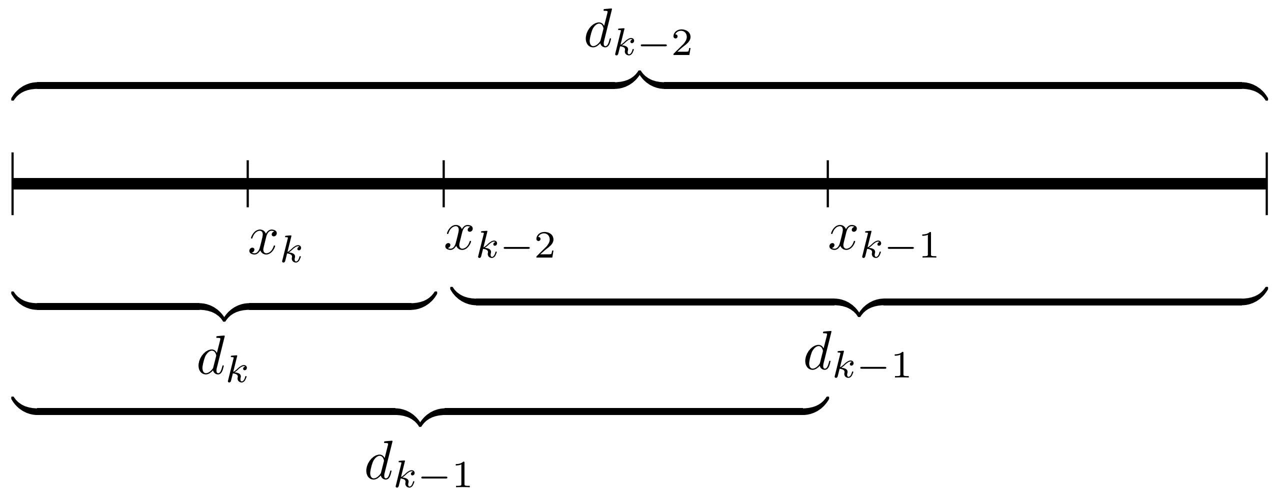
oziroma

a∧c. $P(u) \leq P(v) \Rightarrow x^* \in [a, v]$

b. $P(u) > P(v) \Rightarrow x^* \in [u, b]$

... Unimodalne funkcije

Vsakič dobimo krajši interval s tremi točkami. Ali lahko v njem postavimo četrto točko tako, da ohranimo simetrijo skozi ves tek iskanja rešitve?



Označimo z $x_0, x_1, x_2, \ldots \to x^*$ zaporedje točk, v katerih računamo funkcijske vrednosti. Če lahko postavljamo točke na željeni način, mora veljati

$$d_0 = b - a \qquad \text{in} \qquad d_{k-2} = d_{k-1} + d_k, \; k > 1$$

kjer je d_i širina intervala na i–tem koraku.

. . . Unimodalne funkcije

Privzemimo še, da je razmerje dolžin zaporednih intervalov stalno

$$\frac{d_{i-1}}{d_i} = \varphi, \quad i > 0$$

Tedaj mora φ zadoščati enačbi $\varphi^2 - \varphi - 1 = 0$ in je zato, ker mora biti $\varphi > 1$

$$\varphi = \frac{1}{2}(1 + \sqrt{5}) \approx 1.618033989$$

Dobljeno število φ je razmerje zlatega reza. Zato tudi temu postopku minimizacije pravimo *postopek zlatega reza*. Zanj velja

$$d_n = \frac{d_0}{\varphi^n}$$

Ker je $\varphi^5 = 11.090$, potrebuje postopek 5 korakov za eno decimalko.

Postopek zlatega reza v Pascalu

```
CONST eps = 0.0001;

FUNCTION P( x: real ): real;
BEGIN
   P := ((x - 3)*x + 2)*x - 1
END;

PROCEDURE golden_section( VAR a, b: real;
          VAR r: integer; eps: real );
VAR q, d, u, v, Pu, Pv : real;
BEGIN
   q := (3-sqrt(5))/2;
   d := b-a; u := a + q*d; v := b - q*d;
   Pu := P(u); Pv := P(v); r := 0;
   WHILE d > eps DO BEGIN
      r := r+1;
      IF Pu > Pv THEN BEGIN
         a := u; u := v; Pu := Pv;
         d := b-a; v := b - q*d; Pv := P(v);
      END ELSE BEGIN
         b := v; v := u; Pv := Pu;
         d := b-a; u := a + q*d; Pu := P(u);
      END;
   END;
END; { golden_section }

a := 0; b := 3;
golden_section( a, b, r, eps );
z := (a+b)/2; Pz := P(z);
```

Potek iskanja minimuma funkcije

	a	u	v	b	$P(u)$	$P(v)$	δ
0	0.00000	1.14590	1.85410	3.00000	-1.14279	-1.23104	3.00000
1	1.14590	1.85410	2.29180	3.00000	-1.23104	-0.13613	1.85410
2	1.14590	1.58359	1.85410	2.29180	-1.38483	-1.23104	1.14590
3	1.14590	1.41641	1.58359	1.85410	-1.34420	-1.38483	0.70820
4	1.41641	1.58359	1.68692	1.85410	-1.38483	-1.36279	0.43769
5	1.41641	1.51973	1.58359	1.68692	-1.37934	-1.38483	0.27051
6	1.51973	1.58359	1.62306	1.68692	-1.38483	-1.38119	0.16718
7	1.51973	1.55920	1.58359	1.62306	-1.38434	-1.38483	0.10333
8	1.55920	1.58359	1.59867	1.62306	-1.38483	-1.38410	0.06386
9	1.55920	1.57428	1.58359	1.59867	-1.38488	-1.38483	0.03947
10	1.55920	1.56852	1.57428	1.58359	-1.38477	-1.38488	0.02439
11	1.56852	1.57428	1.57783	1.58359	-1.38488	-1.38490	0.01507
12	1.57428	1.57783	1.58003	1.58359	-1.38490	-1.38489	0.00932
13	1.57428	1.57647	1.57783	1.58003	-1.38490	-1.38490	0.00576
14	1.57647	1.57783	1.57867	1.58003	-1.38490	-1.38490	0.00356
15	1.57647	1.57731	1.57783	1.57867	-1.38490	-1.38490	0.00220
16	1.57647	1.57699	1.57731	1.57783	-1.38490	-1.38490	0.00136
17	1.57699	1.57731	1.57751	1.57783	-1.38490	-1.38490	0.00084
18	1.57699	1.57719	1.57731	1.57751	-1.38490	-1.38490	0.00052
19	1.57719	1.57731	1.57739	1.57751	-1.38490	-1.38490	0.00032
20	1.57719	1.57727	1.57731	1.57739	-1.38490	-1.38490	0.00020
21	1.57727	1.57731	1.57734	1.57739	-1.38490	-1.38490	0.00012
22	1.57731	1.57734	1.57736	1.57739	-1.38490	-1.38490	0.00008

V tabeli je prikazan potek določanja minimuma funkcije $P(x) = x^3 - 3x^2 + 2x - 1$ po postopku zlatega reza.
Dobimo $x^* = 1.57735$ in $P(x^*) = -1.38490$.