Optimizacijske metode

2. Lastnosti in rešljivost

Vladimir Batagelj

Univerza v Ljubljani

FMF, matematika

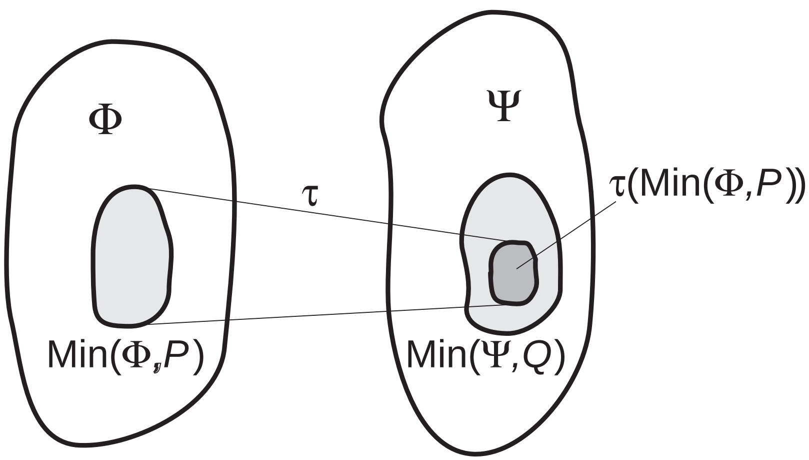
na vrhu

Kazalo

Podobne in enakovredne naloge

Imejmo optimizacijski nalogi (Φ, P, Min) in (Ψ, Q, Min) ter relacijo $\tau \subseteq \Phi \times \Psi$, ki zadošča pogoju:

CS. $\forall x \in \mathrm{Min}(\Phi, P) : \tau(x) \neq \emptyset$



Potem je relacija τ:

- *omejevalna* ali *lokalizator*, če velja: $\mathrm{Min}(\Psi, Q) \subseteq \tau(\mathrm{Min}(\Phi, P))$
- *izbiralna* ali *selektor*, če velja: $\tau(\mathrm{Min}(\Phi, P)) \subseteq \mathrm{Min}(\Psi, Q)$
- *prevajalna* ali *translator*, če velja: $\tau(\mathrm{Min}(\Phi, P)) = \mathrm{Min}(\Psi, Q)$.

…Podobne in enakovredne naloge

Opomba: Določeno povezanost med nalogama bi si zagotovili že z nekoliko šibkejšo zahtevo:

CW. $\mathrm{Min}(\Phi, P) \neq \emptyset \Rightarrow \tau(\mathrm{Min}(\Phi, P)) \neq \emptyset$

Očitno iz veljavnosti pogoja CS izhaja veljavnost pogoja CW. Strožjo zahtevo CS smo privzeli, ker za selektorje zahteva CW še ne zagotavlja veljavnosti naslednje trditve:

IZREK 1 *Pri kompoziciji dveh lokalizatorjev/selektorjev/translatorjev se tip relacije ohranja.*

Produkt relacij ohranja vrsto zveze.

Pojem podobnih in enakovrednih nalog

Definirajmo: Nalogi (Φ, P, Min) in (Ψ, Q, Min) sta si *podobni*, kar zapišemo

$$(\Phi, P, \text{Min}) \sim (\Psi, Q, \text{Min})$$

natanko takrat, ko zanju obstajata selektorja $\tau \subseteq \Phi \times \Psi$ in $\vartheta \subseteq \Psi \times \Phi$. če pa sta relaciji τ in ϑ translatorja, sta nalogi *enakovredni*, kar zapišemo

$$(\Phi, P, \text{Min}) \approx (\Psi, Q, \text{Min})$$

Podobnost in enakovrednost razširimo na naloge maksimizacije s predpisoma:

$(\Phi, P, \text{Max}) \sim (\Phi, -P, \text{Min})$

in

$(\Phi, P, \text{Max}) \approx (\Phi, -P, \text{Min})$.

Iz izreka izhaja, da sta $\sim$ in $\approx$ ekvivalenčni relaciji. Poleg tega je $\approx \subseteq \sim$.

Lastnosti podobnih in enakovrednih nalog

Prva ugotovitev, ki jo lahko povemo o enakovrednih nalogah:

IZREK 2 *Za podobni nalogi* (Φ, P, Min) *in* (Ψ, Q, Min) *velja:*

$$\mathrm{Min}(\Phi, P) = \emptyset \Leftrightarrow \mathrm{Min}(\Psi, Q) = \emptyset$$

Dokaz: Predpostavimo nasprotno. Naj bo (zaradi simetrije je dovolj splošno) $\mathrm{Min}(\Phi, P) = \emptyset$ in $\mathrm{Min}(\Psi, Q) \neq \emptyset$ ter $\vartheta \subseteq \Psi \times \Phi$ selektor. Potem je $\vartheta(\mathrm{Min}(\Psi, Q)) \subseteq \mathrm{Min}(\Phi, P) = \emptyset$; oziroma $\vartheta(\mathrm{Min}(\Psi, Q)) = \emptyset$ kar pa je v protislovju s CW. Trditev je dokazana. $\square$

Nalogi, ki zadoščata lastnosti Ext.7, sta enakovredni, saj sta relaciji:

$$\tau(x) = \begin{cases} \{x\} & x \in \Psi \\ \emptyset & x \in \Phi \setminus \Psi \end{cases} \qquad \text{in} \qquad \vartheta(u) = \{u\}$$

translatorja.

…Lastnosti podobnih in enakovrednih nalog

Označimo $\Phi(x) = \{y \in \Phi : P(y) \leq P(x)\}$. Tedaj iz lastnosti Ext.7' neposredno izhaja:

IZREK 3 *Naj bo $x \in \Phi$. Tedaj je*

$$(\Phi, P, \text{Min}) \approx (\Phi(x), P, \text{Min})$$

IZREK 4 *Naj bo preslikava $\varphi : P(\Phi) \to \mathbb{R}$ strogo naraščajoča. Tedaj je $(\Phi, P, \text{Min}) \approx (\Phi, \varphi \circ P, \text{Min})$ in $\text{Min}(\Phi, P) = \text{Min}(\Phi, \varphi \circ P)$.*

Primeri takih preslikav so na primer $Q = \alpha P + \beta, \alpha > 0$ in za $P > 0$ še preslikave $Q = P^2$, $Q = \sqrt{P}$ in $Q = \ln P$.

Podobni in enakovredni optimizacijski problemi

Optimizacijska *problema sta podobna/enakovredna*, če za vsako nalogo prvega problema obstaja podobna/ enakovredna naloga drugega problema; in obratno.

Pojem podobnih oziroma enakovrednih problemov nam omogoča, da vpeljemo *standardne* probleme, ki jih kar se da natančno razdelamo. Pri reševanju problemov/nalog pa jih najprej poskusimo prevesti na kakega od standardnih.

Zgled: Linearno programiranje

Za zgled si oglejmo nalogo (Φ, P, Min) kjer je

$$\Phi = \{x \in \mathbb{R}^n : Ax = b, A \in \mathbb{R}^{m \times n}, b \in \mathbb{R}^m\}$$

in $P(x) = c^T|x|$, $c, |x| \in \mathbb{R}^n$, $c > 0$; in smo z $|x|$ označili vektor s komponentami $|x|_i = |x_i|$.

Vpeljimo še vektorja x^+ in x^- s komponentami

$$x_i^+ = \max(0, x_i) \qquad \text{in} \qquad x_i^- = \max(0, -x_i)$$

Zanju velja $x^+, x^- \geq 0$ in $x^+ x^- = 0$ ter naprej, kar je za nas posebej zanimivo

$$x = x^+ - x^- \qquad \text{in} \qquad |x| = x^+ + x^-$$

Vstavimo to v $P(x)$.

...Zgled: Linearno programiranje

Dobimo

$$P(x) = c^T|x| = c^T x^+ + c^T x^-$$

oziroma, če postavimo $y = \begin{bmatrix} x^+ \\ x^- \end{bmatrix}$ in $q = \begin{bmatrix} c \\ c \end{bmatrix}$, lahko zapišemo $P(x) = q^T y = Q(y)$.

Ker sta $x^+, x^- \geq 0$, je tudi $y \geq 0$.

Poskusimo izraziti z y še pogoj iz opisa množice Φ:

$$b = Ax = Ax^+ - Ax^-$$

če postavimo $B = [A, -A]$, lahko zapišemo $b = By$ in definiramo

$$\Psi = \{y \in \mathbb{R}^{2n} : By = b, y \geq 0\}$$

Tako smo dobili nalogo (Ψ, Q, Min), ki sodi med naloge linearnega programiranja.

...Zgled: Linearno programiranje

Zato, da bi lahko vzpostavili zvezo med obema nalogama, bi morala vsaj kakšna minimalna rešitev naloge (Ψ, Q, Min) imeti obliko

$$y = [{y^+}^T, {y^-}^T]$$

kar pa ni samo po sebi umevno. K sreči je temu vselej tako.

Naj bo w minimalna rešitev naloge (Ψ, Q, Min). Z v označimo vektor s komponentami

$$v_i = v_{i+n} = \min(w_i, w_{i+n})$$

Ker je $w \geq 0$, je tudi $v \geq 0$. Postavimo sedaj $z = w - v$. Iz definicije vektorja v je očitno, da je $z \geq 0$; pokažimo še, da je $Bz = b$:

$$Bz = B(w - v) = Bw - [A, -A] \begin{bmatrix} v' \\ v' \end{bmatrix} = Bw = b$$

...Zgled: Linearno programiranje

Torej je $z \in \Psi$. Poglejmo sedaj $Q(z)$

$$Q(z) = q^T z = q^T w - q^T v = Q(w) - q^T v$$

Ker je w minimum je to mogoče le, če je $q^T v = 0$; od tu pa zaradi $c > 0 (\Rightarrow q > 0)$ in $v \geq 0$ sledi $v = 0$ in dalje

$$w_i w_{i+n} = \min(w_i, w_{i+n}). \max(w_i, w_{i+n}) = 0$$

Torej je w res željene oblike. To pa pomeni, da je

$$(\Phi, P, \mathrm{Min}) \approx (\Psi, Q, \mathrm{Min})$$

pri čemer sta

$$\tau : x \to \begin{bmatrix} x^+ \\ x^- \end{bmatrix} \qquad \text{in} \qquad \vartheta : \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} \to y_1 - y_2$$

O nepraznosti množice $\mathrm{Min}(\Phi, P)$

O obstoju globalnih minimumov – *rešljivosti optimizacijskih nalog* v splošnem ni mogoče veliko povedati. Očitno je množica $\mathrm{Min}(\Phi, P)$ neprazna, če je množica Φ končna in neprazna.

V tem primeru lahko množico $\mathrm{Min}(\Phi, P)$, vsaj teoretično, določimo s *polnim preborom* množice dopustnih rešitev Φ:

$P_{opt} := \infty;$
forall $x \in \Phi$ **do**
  $Px := P(x);$
  if $Px < P_{opt}$ **then**
    $P_{opt} := Px; Min := \{x\}$
  elseif $Px = P_{opt}$ **then**
    $Min := Min \cup \{x\}$
  endif
endfor

Najkrajše poti

Za diskretno optimizacijsko nalogo z neskončno množico dopustnih rešitev Φ lahko pogosto z uporabo lastnosti Ext.7 določimo enakovredno nalogo s končno množico dopustnih rešitev in s tem pokažemo njeno rešljivost.

Naj bo $G = (V, A)$ končen graf in $d : A \to \mathbb{R}^+$ *dolžina* povezav. *Naloga o najkrajših poteh* iz točke u v točko v grafa G imenujemo nalogo (Φ, P, Min), kjer je

$$\Phi = \{\sigma : \sigma \text{ je sprehod iz } u \text{ v } v \text{ po } G\}$$

in, za sprehod $\sigma = (u, a_1, v_1, a_2, v_2, \ldots, v_{n-1}, a_n, v)$

$$P(\sigma) = \sum_{a \in \sigma} d(a)$$

Množica dopustnih rešitev Φ je neprazna natanko takrat, ko je točka v dosegljiva iz točke u po grafu G.

...Najkrajše poti

Pokažimo, da za vsak neosnoven sprehod $\sigma \in \Phi$ obstaja osnoven sprehod (pot) $\sigma_0 \in \Phi$, za katerega je $P(\sigma_0) < P(\sigma)$.

Če sprehod σ ni osnoven, se v njem neka točka ponovi $v_i = v_j$, $i < j$. Označimo $\sigma_z = (u, a_1, \ldots, v_i)$, $\sigma_s = (v_i, a_{i+1}, \ldots, v_j)$ in $\sigma_k = (v_j, a_{j+1}, \ldots, v)$. Tedaj je $\sigma = \sigma_z\sigma_s\sigma_k$ in je sprehod iz u v v tudi $\sigma' = \sigma_z\sigma_k$. Velja še

$$P(\sigma) = P(\sigma_z) + P(\sigma_s) + P(\sigma_k) > P(\sigma_z) + P(\sigma_k) = P(\sigma')$$

Če je σ' pot, je trditev dokazana; sicer postopek ponovimo. Na ta način, zaradi končnosti sprehoda σ, v končno korakih pridemo do iskane poti σ_0. Torej množica

$$\Psi = \{\sigma : \sigma \text{ je pot iz } u \text{ v } v \text{ po } G\}$$

zadošča pogojem iz lastnosti Ext.7. Množica Ψ je končna.

Bolzano-Weierstrassov izrek

IZREK 5 *Naj bo P zvezna funkcija na kompaktni (zaprta in omejena) množici Φ, tedaj je* $\mathrm{Min}(\Phi, P) \neq \emptyset$.

Dokaz: Naj bo $m = \min(\Phi, P)$. Tedaj obstaja zaporedje $(x_k : k \in \mathbb{N})$, tako da $P(x_k) \to m$. Ker je Φ kompaktna množica, obstaja $K \subseteq \mathbb{N}$ tako da $x_i \to x^* \in \Phi$ za $i \in K$ in velja

$$m = \lim_{k\to\infty} P(x_k) = \lim_{i\to\infty, i\in K} P(x_i) = P(x^*)$$

Ker je $P(x^*) > -\infty$, je tudi $\min(\Phi, P) > -\infty$ in $\forall x \in \Phi : P(x) \geq P(x^*)$; kar pomeni $x^* \in \mathrm{Min}(\Phi, P)$. $\square$

... Bolzano-Weierstrassov izrek

Večkrat nam pride prav tudi naslednja posledica Bolzano-Weierstrassovega izreka:

IZREK 6 *Naj bo* Φ *zaprta množica,* $P : \Phi \to \mathbb{R}$ *zvezna funkcija in naj bo za nek* $x \in \Phi$ *množica* $\Phi(x) = \{y \in \Phi : P(y) \leq P(x)\}$ *omejena. Tedaj je* $\mathrm{Min}(\Phi, P) \neq \emptyset$.

Primer uporabe: Vsak polinom sode stopnje s pozitivnim vodilnim koeficientom ima vsaj en minimum.

Kotlaste funkcije

Večkrat lahko množico dopustnih rešitev Φ skrčimo na naslednji način. Recimo, da znamo vsaki rešitvi $x \in \Omega$ pripisati njeno *velikost* $m(x)$, $m : \Omega \to \mathbb{R}_0^+$. Pravimo, da je kriterijska funkcija *kotlasta*, če zanjo velja

$$\exists x_0 \in \Phi\, \exists c > 0\, \forall x \in \Phi : (m(x) > c \Rightarrow P(x) > P(x_0))$$

Iz lastnosti Ext.7' neposredno izhaja

IZREK 7 *Naj bo kriterijska funkcija* P *naloge* (Φ, P, Min) *kotlasta in*

$$\Psi = \{x \in \Phi : m(x) \le c\}$$

tedaj je $(\Phi, P, \mathrm{Min}) \approx (\Psi, P, \mathrm{Min})$.

. . . Kotlaste funkcije

Poseben razred kotlastih funkcij dobimo takole. Naj za nalogo (Φ, P, Min) velja

a. $\forall c \in \mathbb{R}^+ \exists x \in \Phi : m(x) > c$

b. $m(x) \to \infty \Rightarrow P(x) \to \infty$

Tedaj je funkcija P kotlasta.

Uporabimo to za nalogo $(\mathbb{R}^2, P, \mathrm{Min})$, kjer je

$$P(x, y) = x^4 + y^4 - 3xy$$

Postavimo $m((x, y)) = \max(|x|, |y|)$. Lastnost a je izpolnjena, iz

$$P(x, y) = (x^4 + y^4)(1 - \frac{3xy}{x^4 + y^4}), \quad x^2 + y^2 > 0$$

pa izhaja še veljavnost lastnosti b. Ker je množica $\Psi = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : |x|, |y| \leq c\}$ kompaktna in P zvezna, je po izreku 5 $\mathrm{Min}(\mathbb{R}^2, P) \neq \emptyset$.