Optimizacijske metode

8. večkriterijska optimizacija

Vladimir Batagelj

Univerza v Ljubljani

FMF, matematika

na vrhu

Kazalo

Večkriterijske optimizacijske naloge

Pogosto imamo v danem sistemu več ciljev. Recimo, da jih znamo izraziti s kriterijskimi funkcijami nad isto množico dopustnih rešitev Φ:

$$\mathbf{P}(x) = P_1(x), P_2(x), \ldots, P_k(x), \quad x \in \Phi$$

Želimo čimbolj zadostiti vsem kriterijem.

V nadaljnjem se omejimo na minimizacijo – z uporabo prevedbe nalog maksimizacije na enakovredne naloge minimizacije lahko vse delne naloge izrazimo kot naloge minimizacije $(\Phi, P_i, \mathrm{Min})$.

Najugodnejše je, če je

$$\bigcap_{i=1}^{k} \mathrm{Min}(\Phi, P_i) \neq \emptyset$$

vendar se to le poredko zgodi.

Paretove rešitve

V nadaljevanju bomo potrebovali nekaj novih relacij:

$p \geqq q \Leftrightarrow \forall i : p_i \geq q_i$	delna
$p \geq q \Leftrightarrow p \geqq q \wedge p \neq q$	stroga delna
$p > q \Leftrightarrow \forall i : p_i > q_i$	stroga delna

Pravimo, da je rešitev $\hat{x}$ optimalna ali *učinkovita po Paretu* ali (na kratko kar) *Paretova*, če velja (glej sliko):

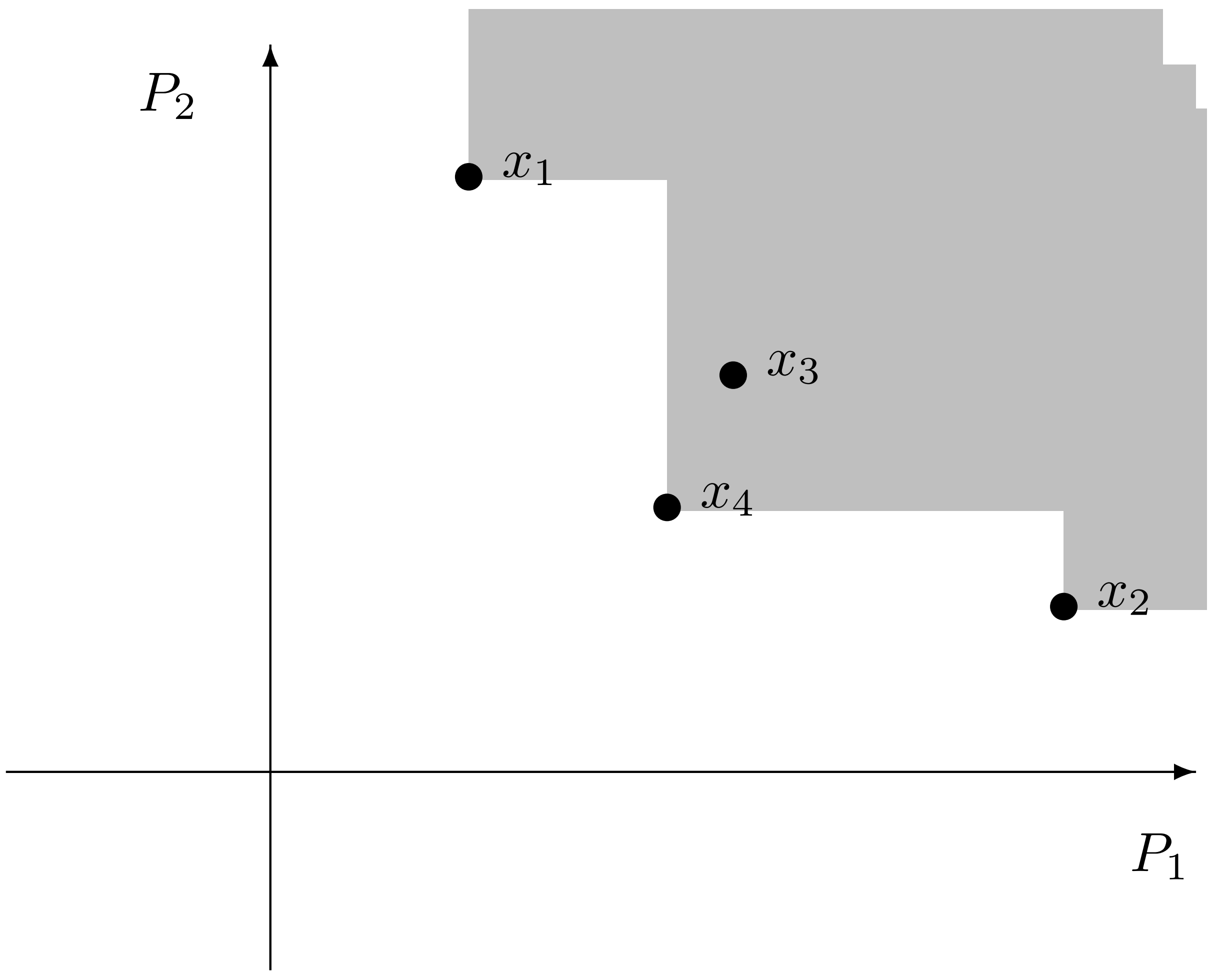
$$\neg \exists x \in \Phi : \mathbf{P}(\hat{x}) \geq \mathbf{P}(x)$$

ali enakovredno

$$\forall x \in \Phi : \neg(\mathbf{P}(\hat{x}) \geq \mathbf{P}(x))$$

Če v definiciji relacijo $\geq$ zamenjamo s $>$, dobimo *šibko učinkovite* ali *optimalne po Slaterju* rešitve. Očitno je smiselno končno odločitev iskati v množici Paretovih rešitev.

Paretove rešitve – slika



Lastnosti Paretovih rešitev

IZREK 1 *Naj bo funkcija* $\varphi : \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}$ *strogo naraščajoča po vsaki komponenti. Tedaj je minimum funkcije*

$$Q(x) = \varphi(P_1(x), \ldots, P_k(x)), \quad x \in \Phi$$

Paretova rešitev.

Dokaz: Predpostavimo nasprotno. Naj bo rešitev x^* minimum funkcije $Q(x)$ in naj ne bo Paretova. Tedaj

$$\exists \hat{x} \in \Phi : \mathbf{P}(\hat{x}) \leq \mathbf{P}(x^*)$$

pri čemer na vsaj eni, i–ti, komponenti velja stroga neenakost. Po predpostavki izreka velja:

...lastnosti Paretovih rešitev

$$\begin{aligned}
Q(x^*) &= \varphi(P_1(x^*), P_2(x^*), \ldots, P_i(x^*), \ldots, P_k(x^*)) \\
&\geq \varphi(P_1(\hat{x}), P_2(x^*), \ldots, P_i(x^*), \ldots, P_k(x^*)) \\
&\ldots \\
&\geq \varphi(P_1(\hat{x}), P_2(\hat{x}), \ldots, P_i(x^*), \ldots, P_k(x^*)) \\
&> \varphi(P_1(\hat{x}), P_2(\hat{x}), \ldots, P_i(\hat{x}), \ldots, P_k(x^*)) \\
&\ldots \\
&\geq \varphi(P_1(\hat{x}), P_2(\hat{x}), \ldots, P_i(\hat{x}), \ldots, P_k(\hat{x})) = Q(\hat{x})
\end{aligned}$$

kar je v protislovju z minimalnostjo točke x^*. $\square$

Zgledi

Zgled: Če je $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_k) > \mathbf{0}$, je funkcija

$$\varphi(t_1, t_2, \ldots, t_k; \alpha) = \sum_{i=1}^{k} \alpha_i t_i$$

strogo naraščajoča po vsaki komponenti.

Če so kriterijske funkcije P_i strogo konveksne, velja za ta φ tudi obrat prejšnjega izreka (Karlin): vsaka Paretova rešitev je minimalna rešitev naloge $(\Phi, Q(.;\alpha), \mathrm{Min})$ za nek $\alpha > \mathbf{0}$. □

Zgled: Če so $t_i > 0$ in $\alpha > \mathbf{0}$, je funkcija

$$\varphi(t_1, t_2, \ldots, t_k; \alpha) = \prod_{i=1}^{k} t_i^{\alpha_i}$$

strogo naraščajoča po vsaki komponenti. □

... lastnosti Paretovih rešitev

IZREK 2 (Germejer) *Naj bodo $P_i(x) > 0$ na Φ. Tedaj je Paretova rešitev $\hat{x}$ minimalna rešitev za nek nabor $\alpha > \mathbf{0}$, $\sum_i \alpha_i = 1$ za kriterijsko funkcijo*

$$Q(x;\alpha) = \max_i \alpha_i P_i(x)$$

Poleg tega, strogo neučinkovite rešitve ne moremo dobiti pri nobenem naboru $\alpha > \mathbf{0}$.

Dokaz: Naj bo $\hat{x} \in \Phi$ Paretova rešitev in $\mathbf{P}(\hat{x}) > \mathbf{0}$. Postavimo

$$\hat{\alpha}_i = \frac{1}{P_i(\hat{x})}, \quad i = 1..k$$

Tedaj je $Q(\hat{x};\hat{\alpha}) = \max_i \hat{\alpha}_i P_i(\hat{x}) = 1$.

Ker je rešitev $\hat{x}$ Paretova, obstaja za vsak $x \in \Phi$, $x \neq \hat{x}$ tak j, da je $P_j(x) > P_j(\hat{x})$.

. . . lastnosti Paretovih rešitev

No, tedaj je

$$Q(x;\hat{\alpha}) = \max_i \hat{\alpha}_i P_i(x) \geq \hat{\alpha}_j P_j(x) > \hat{\alpha}_j P_j(\hat{x}) = 1 = Q(\hat{x};\hat{\alpha})$$

kar pomeni, da je $\hat{x} \in \mathrm{Min}(\Phi, Q)$.

Stvar se bistveno ne spremeni, če v gornjem delu dokaza $\hat{\alpha}_i$ nadomestimo z $\hat{\alpha}'_i = \frac{\hat{\alpha}_i}{\sum_i \hat{\alpha}_i} > 0$. Zanje velja tudi $\sum_i \hat{\alpha}'_i = 1$.

Naj bo sedaj $y \in \Phi$ strogo neučinkovita rešitev. Tedaj vselej obstaja $x \in \Phi$, tako da je $\mathbf{P}(x) \geq \mathbf{P}(y)$, in je za vsak $\alpha > \mathbf{0}$ in vsak $i : \alpha_i P_i(x) < \alpha_i P_i(y)$ oziroma tudi

$$\max_i \alpha_i P_i(x) < \max_i \alpha_i P_i(y)$$

kar pomeni, da je $Q(x;\alpha) < Q(y;\alpha)$ in potemtakem res $y \notin \mathrm{Min}(\Phi, Q(.;\alpha))$.

$\square$

Pristopi

Pri postopkih za določanje neke rešitve je potrebno razdelati vprašanji:

- ali je dobljena rešitev učinkovita;
- če ni, ali se jo da izboljšati do učinkovite

Običajno uporabimo enega od naslednjih pristopov:

1. Prevedba na enokriterijsko optimizacijo

a) združitev kriterijev v skupni kriterij. Na primer:

$$Q(x;\alpha) = \max_i \alpha_i P_i(x), \qquad \alpha_i = \frac{1}{\min(\Phi, P_i)}$$

ali

$$Q(x) = \sum_i \frac{P_i(x) - \min(\Phi, P_i)}{\min(\Phi, P_i)}$$

b) izbira enega kriterija za glavnega, ostali določajo za izbrane prage p_j novo množico dopustnih rešitev Φ'.
Tako dobimo nalogo $(\Phi', P', \min)$:

$$P' = P_i, \qquad \Phi' = \{x \in \Phi : P_j(x) \leq p_j, j \neq i\}$$

Običajno to večkrat ponovimo. S primerno izbiro pragov, lahko dobimo vsako Paretovo točko. Pri ponovnih izbirah pragov lahko upoštevamo prejšnje rezultate – interaktivna procedura.

c) zaporedni popusti; rešimo nalogo (Φ, P_1). Nato zaporedoma rešujemo naloge (Φ_i, P_i):

$$\Phi_i : P_j(x) \leq \min(\Phi_j, P_j) + \Delta_j, \qquad j < i$$

kjer je Δ_j popust.

d) prevedba na stohastično programiranje oziroma nedoločenost.

. . . Pristopi

2. Lokalna optimizacija.

Dobljene rešitve so 'lokalno' Paretove. Z večkratno ponovitvijo postopka 'sejemo' množico dobljenih 'lokalnih' Paretovih rešitev, tako da jo vsebolj sestavljajo prave Paretove rešitve.

3. Uporaba metod matematične analize

Gre v nekaterih zveznih primerih.

Kakorkoli že, večkriterijski problemi običajno ne morejo biti matematično privedeni do konca. Končna odločitev je prepuščena odločevalcu. Različni pristopi omogočajo le, da presejemo naše rešitve in predstavimo njihove dobre in slabe plati. S pregledom teh rešitev je odločitev vsekakor olajšana.