Rešitve izpita iz verjetnosti in statistike z dne 27. 8. 2013

IŠRM

1. a) Iz $\int_{-5}^{5}(5+t)\,\mathrm{d}t = \int_{-5}^{5}(5-t)\,\mathrm{d}t = \int_{0}^{10} x\,\mathrm{d}x = 50$ sledi $a = b = \dfrac{1}{50}$.
b) Dogodek, da oba vstopita še pred začetkom predavanja, je dogodek, da je $A < 0$ in $B < 0$. Zaradi neodvisnosti velja:

$$P(A<0, B<0) = \frac{1}{2500}\int_{-5}^{0}(5+t)\,\mathrm{d}t\int_{-5}^{0}(5-t)\,\mathrm{d}t = \frac{3}{16} = 0\text{˙}1875\,.$$

c) Izračunati je treba $P(A<B \mid A<0, B<0) = \dfrac{P(A<B, A<0, B<0)}{P(A<0, B<0)}$. Velja:

$$\begin{aligned}
P(A<B, A<0, B<0) &= \frac{1}{2500}\iint_{\substack{-5<u,v<0\\ u<v}}(5+u)(5-v)\,\mathrm{d}u\,\mathrm{d}v = \\
&= \frac{1}{2500}\iint_{\substack{0<x<5\\ 5<y<10\\ x+y<10}} xy\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \\
&= \frac{1}{2500}\int_{5}^{10} y\int_{0}^{10-y} x\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \\
&= \frac{1}{5000}\int_{5}^{10} y(10-y)^2\,\mathrm{d}y = \\
&= \frac{1}{5000}\int_{0}^{5}(10-t)t^2\,\mathrm{d}t = \\
&= \frac{5}{96}\,.
\end{aligned}$$

Končno je torej $P(A<B \mid A<0, B<0) = \dfrac{16}{3}\cdot\dfrac{5}{96} = \dfrac{5}{18} \doteq 0\text{˙}278$.

2. Iz:

$$K(aX+bY+cZ, X+Y) = 3a+3b\,, \quad K(aX+bY+cZ, X-Y-2Z) = 3a-3b-6c$$

dobimo, da mora veljati $b = -a$, $c = a$. Takšni so torej večkratniki slučajne spremenljivke $X - Y + Z$.

3. Centralnega limitnega izreka ne moremo uporabiti neposredno na S, ker produkt slučajne spremenljivke X in normalno porazdeljene slučajne spremenljivke, četudi neodvisne od X, ni nujno normalno porazdeljen. Prav tako centralni limitni izrek ne velja za vsoto $XY_1 + XY_2 + \cdots + XY_{100}$, saj so seštevanci odvisni (centralni limitni izrek se sicer da posplošiti tudi na vsote slučajnih spremenljivk z določeno vrsto odvisnosti, vendar pa je odvisnost prej omenjenih seštevancev premočna). Pravilno pa bo iskano verjetnost računati s pomočjo pogojnih verjetnosti glede na X. Če pišemo $T := Y_1 + Y_2 + \cdots + Y_{100}$, po izreku o polni verjetnosti velja:

$$\begin{aligned} P(S > 150) &= P(X = 1)\, P(S > 150 \mid X = 1) + P(X = 2)\, P(S > 150 \mid X = 2) = \\ &= \frac{2}{3}\, P(T > 150) + \frac{1}{3}\, P(T > 75)\,. \end{aligned}$$

Za slučajno spremenljivko T pa centralni limitni izrek velja: iz $E(T) = 100$ in $D(T) = 10000$ dobimo:

$$P(T > a) \approx \frac{1}{2} - \Phi\left(\frac{a - 100}{100}\right)\,,$$

torej je:

$$P(S > 150) \approx \frac{1}{2} - \frac{2}{3}\,\Phi\left(\frac{1}{2}\right) + \frac{1}{3}\,\Phi\left(\frac{1}{4}\right) \doteq 0\text{'}405\,.$$

Oglejmo si še, koliko bi znašala iskana verjetnost za normalno slučajno spremenljivko z enakim matematičnim upanjem in disperzijo kot S. Za ta namen izračunamo:

$$\begin{aligned} E(S) &= P(X = 1)\, E(S \mid X = 1) + P(X = 2)\, E(S \mid X = 2) = \\ &= \frac{2}{3}\, E(T) + \frac{1}{3} \cdot 2\, E(T) = \\ &= \frac{400}{3}\,. \end{aligned}$$

Nadalje je $E(T^2) = D(T) + \big(E(T)\big)^2 = 20000$ in zato:

$$\begin{aligned} E(S^2) &= P(X = 1)\, E(S^2 \mid X = 1) + P(X = 2)\, E(S^2 \mid X = 2) = \\ &= \frac{2}{3}\, E(T^2) + \frac{1}{3} \cdot 4\, E(T^2) = \\ &= 40000\,, \\ D(S) &= E(S^2) - \big(E(S)\big)^2 = \frac{200000}{9} \end{aligned}$$

Za normalno slučajno spremenljivko bi bila torej iskana verjetnost enaka:

$$\frac{1}{2} - \Phi\left(\frac{150 - 400/3}{100\sqrt{20}/3}\right) = \frac{1}{2} - \Phi\left(\frac{1}{2\sqrt{20}}\right) \doteq 0\text{'}455\,.$$

4. Uporabimo Wilcoxon–Mann–Whitneyjev test. Imamo 27 revij, ki realno dopuščajo objavo člankov iz verjetnosti, in 90 preostalih revij. Vsota rangov revij, ki realno dopuščajo objavo člankov iz teorije verjetnosti, je 2006. Testna statistika pride:

$$Z = \sqrt{\frac{3}{27 \cdot 90 \cdot 118}}\big(2 \cdot 2006 - 27 \cdot 118\big) \doteq 2\text{'}67\,,$$

kar je večje od kritične vrednosti $z_{0.995} \doteq 2\text{'}58$, zato ničelno hipotezo zavrnemo.