Rešitve izpita iz verjetnosti in statistike z dne 17. 2. 2011

IŠRM

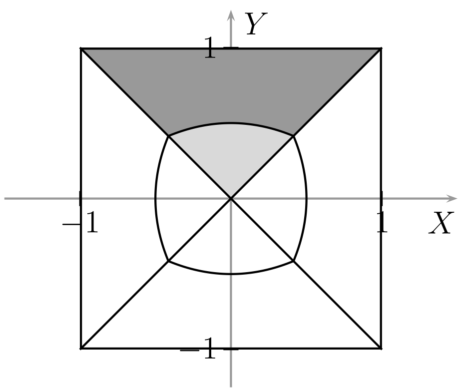
1. Označimo s H_i dogodek, da je Aleksander v prvih 7 dneh šel na avtobus natanko i-krat, z Z pa dogodek, da se Aleksander in Branka nista nikoli srečala. Tedaj velja:

$$\begin{aligned}
P(H_0) &= \frac{\binom{3}{3}}{\binom{10}{3}} = \frac{1}{120}\,, & P(Z \mid H_0) &= 1\,, \\
P(H_1) &= \frac{\binom{7}{1}\binom{3}{2}}{\binom{10}{3}} = \frac{21}{120}\,, & P(Z \mid H_1) &= \frac{1}{2}\,, \\
P(H_2) &= \frac{\binom{7}{2}\binom{3}{1}}{\binom{10}{3}} = \frac{63}{120}\,, & P(Z \mid H_2) &= \frac{1}{4}\,, \\
P(H_3) &= \frac{\binom{7}{3}}{\binom{10}{3}} = \frac{35}{120}\,, & P(Z \mid H_3) &= \frac{1}{8}\,.
\end{aligned}$$

Po Bayesovi formuli je:

$$\begin{aligned}
&P(H_0 \mid Z) = \\
&= \frac{P(H_0)\,P(Z \mid H_0)}{P(H_0)\,P(Z \mid H_0) + P(H_1)\,P(Z \mid H_1) + P(H_2)\,P(Z \mid H_2) + P(H_3)\,P(Z \mid H_3)} = \\
&= \frac{8}{253} \doteq 0{\cdot}0316\,.
\end{aligned}$$

2. Kvadrat razdelimo na štiri trikotnike z vrhovi v središču kvadrata in osnovnicami, ki se ujemajo s stranicami kvadrata (glej sliko). Zaradi simetrije je dovolj, če se omejimo na en sam trikotnik. Kvadrat postavimo v koordinatni sistem (X, Y), tako da se središče kvadrata ujema z izhodiščem koordinatnega sistema:



V zgornjem trikotniku bo tedaj točka bližje robu kot središču kvadrata (sivo) natanko tedaj, ko bo $1 - Y < \sqrt{X^2 + Y^2}$. Po ureditvi (in ob upoštevanju lege točke) dobimo, da je to natanko tedaj, ko je $Y > (1 - X^2)/2$. Mejna črta gre od točke $(-a, a)$ do točke (a, a), kjer je $a = 1/(1 + \sqrt{2}) = \sqrt{2} - 1$.
Ploščina celega trikotnika je 1, ploščina ugodnega območja (temnosivo) in tudi verjetnost našega dogodka pa je enaka:

$$
\begin{aligned}
(1-a)^2 + \int_{-a}^{a} \left(1 - \frac{1-x^2}{2}\right) \mathrm{d}x &= (1-a)^2 + \int_0^a (1+x^2)\,\mathrm{d}x = \\
&= 1 - a + a^2 + \frac{a^3}{3} = \frac{8 - 4\sqrt{2}}{3} \doteq 0\text{˙}781\,.
\end{aligned}
$$

3. Iz $E(U_i) = 1/2$, $E(U_i^2) = 1/3$, $E(V_i) = 4/3$, $E(V_i^2) = 2$ in neodvisnosti dobimo $E(X_i) = E(U_i)\,E(V_i) = 2/3$, $E(X_i^2) = E(U_i^2)\,E(V_i^2) = 2/3$ in $D(X_i) = 2/3 - (2/3)^2 = 2/9$. Sledi $E(S) = 200/3$ in zaradi neodvisnosti še $D(S) = 200/9$. Ker je S vsota velikega števila neodvisnih slučajnih spremenljivk, je po centralnem limitnem izreku:

$$
P(S < 60) \approx \Phi\left(\frac{60 - \frac{200}{3}}{\sqrt{\frac{200}{9}}}\right) + \frac{1}{2} = \frac{1}{2} - \Phi\big(\sqrt{2}\big) \doteq 0\text{˙}0787\,.
$$

Točen rezultat: 0˙07642.

4. Iz:

$$
P(X_i = x) = \binom{k-1}{2} \left(\frac{1}{\alpha}\right)^3 \left(1 - \frac{1}{\alpha}\right)^{x-3} = \binom{k-1}{2} \frac{(\alpha - 1)^{x-3}}{\alpha^k}
$$

dobimo:

$$
\begin{aligned}
&\ln L = \ln L(x_1, \ldots x_n; \alpha) = \\
&\quad = n \ln \binom{k-1}{2} + (x_1 + x_2 + \cdots + x_n - 3n) \ln(\alpha - 1) - (x_1 + x_2 + \cdots + x_n) \ln \alpha\,.
\end{aligned}
$$

Nadalje po odvajanju in ureditvi dobimo:

$$
\frac{\partial \ln L}{\partial \alpha} = \frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_n - 3n\alpha}{\alpha(\alpha - 1)}\,.
$$

Cenilka po metodi največjega verjetja bo torej:

$$
\hat{\alpha} = \frac{X_1 + X_2 + \cdots + X_n}{3n}\,.
$$

Ker je $E(X_i) = 3/\alpha$, je $E(\hat{\alpha}) = \alpha$, torej je cenilka nepristranska.