Rešitve kolokvija iz verjetnosti in statistike z dne 17. 1. 2008

IŠRM

1. $P(Y > X^2) = \displaystyle\int_0^1 \int_{x^2}^{\infty} \frac{1}{(1+y)^2}\, \mathrm{d}y\, \mathrm{d}x = \int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{1+x^2} = \operatorname{arctg} x \Big|_0^1 = \frac{\pi}{4}.$

2. Najprej lahko izberemo, na katerih sedežih bodo sedeli možje in na katerih žene. Sedeže, na katerih bodo sedeli npr. možje, označimo z 1, 2, 3 in 4. Tedaj je $S = X_1 + X_2 + X_3 + X_4$, kjer je:

$$X_i = \begin{cases} 1 & ; \text{če ima mož, ki sedi na } i\text{-tem sedežu, poleg sebe svojo ženo} \\ 0 & ; \text{sicer} \end{cases} .$$

Tedaj je za vsak i očitno $E(X_i) = 1/2$ in iz linearnosti matematičnega upanja sledi $E(S) = 2$.

Za izračun disperzije upoštevamo, da je $E(X_i^2) = E(X_i) = 1/2$. Če je med i-tim in j-tim moškim sedežem natanko en ženski sedež, je $E(X_i X_j) = 1/4$ (ločimo primer, ko ena izmed žena izbranih mož sedi vmes, in primer, ko nobena izmed teh dveh žena ne sedi vmes). Če sta i-ti in j-ti sedež nasproti, pa je $E(X_i X_j) = 1/3$. Tako dobimo $E(S^2) = 16/3$ in $D(S) = 4/3$.

Druga možnost je, da nalogo rešimo neposredno z določitvijo porazdelitve slučajne spremenljivke S (gledamo 24 enako verjetnih razporeditev žena). Tako dobimo, da je:

$$S \sim \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1/12 & 1/3 & 1/6 & 1/3 & 1/12 \end{pmatrix} .$$

3. Iz $E(X_i) = 0$ in $D(X_i) = 1/3$ dobimo $E(\bar{X}) = 0$ in $D(\bar{X}) = 1/300$. Tako velja:

$$\begin{aligned} P\left(|\bar{X}| > \frac{1}{10}\right) &= 1 - P\left(|\bar{X}| \le \frac{1}{10}\right) \approx \\ &\approx 1 - \left[\Phi\left(\frac{1/10}{\sqrt{1/300}}\right) - \Phi\left(-\frac{1/10}{\sqrt{1/300}}\right)\right] = \\ &= 1 - 2\Phi\big(\sqrt{3}\big) \doteq 0\text{˙}08326452\,. \end{aligned}$$

Točen rezultat: 0˙08326461 .

4. $\bar{X} = 52\text{˙}125, \quad s \doteq 1\text{˙}8851, \quad df = 7, \quad T \doteq 3\text{˙}19,$
$K_\alpha \doteq (-\infty, -3\text{˙}00) \cup (3\text{˙}00, \infty)$.
Hipotezo zavrnemo.