Rešitve izpita iz verjetnosti in statistike z dne 8. 7. 2008

IŠRM

1. Označimo z A dogodek, da Pepček vloži vsa pisma v prave ovojnice, z B pa dogodek, da prvo pismo vloži v napačno ovojnico. Tedaj velja:

$$P(A) = \left(0\text{'}9 + 0\text{'}1 \cdot \frac{1}{3}\right)\left(0\text{'}9 + 0\text{'}1 \cdot \frac{1}{2}\right) \doteq 0\text{'}8867\,,$$
$$P(B \mid \bar{A}) = \frac{P(B \cap \bar{A})}{P(\bar{A})} = \frac{P(B)}{1 - P(A)} = \frac{0\text{'}1 \cdot \frac{2}{3}}{1 - P(A)} \doteq 0\text{'}5882\,.$$

2. Za izračun konstante c je najlažje upoštevati:

$$1 = c\int_0^\infty \int_y^\infty \frac{1}{(1+x)^3}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = c\int_0^\infty \frac{1}{2(1+y)^2}\,\mathrm{d}y = \frac{c}{2}\,,$$

od koder dobimo $c = 2$. Za izračun matematičnega upanja pa se splača nastaviti:

$$E\left(\frac{1}{X}\right) = 2\int_0^\infty \int_0^x \frac{1}{x(1+x)^3}\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x = 2\int_0^\infty \frac{1}{(1+x)^3}\,\mathrm{d}x = 1\,.$$

3. Velja:

$$P(X_1 X_2 \cdots X_n > 1) = P(Y_1 + Y_2 + \cdots + Y_n > 0)\,,$$

kjer je $Y_i := \ln X_i$. Tako smo produkt prevedli na vsoto, katere porazdelitev lahko aproksimiramo z ustrezno normalno.
Če s q označimo gostoto slučajnih spremenljivk Y_i ter še $a = \ln(0\text{'}9)$ in $b = \ln(1\text{'}1)$, za $a < y < a$ velja:

$$q(y) = \frac{1}{e^y(b-a)}\left|\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}y}\,e^y\right| = \frac{1}{b-a}\,,$$

torej so slučajne spremenljivke $Y_1, \ldots Y_{500}$ porazdeljene enakomerno na intervalu (a, b). Če označimo še $S := Y_1 + Y_2 + \cdots + Y_{500}$, velja $E(S) = 500(a+b)/2$ in $D(S) = 500(b-a)^2/12$. Sledi:

$$P(S > 0) \approx \Phi(\infty) - \Phi\left(\frac{-250(a+b)}{(b-a)\sqrt{500/12}}\right) \doteq \frac{1}{2} - \Phi(1\text{'}9397) \doteq 0\text{'}026206\,.$$

Točen rezultat: 0'026197.

4. $\bar{X} = 66$, $\quad s \doteq 2\text{'}3452$, $\quad df = 8$, $\quad T \doteq 2\text{'}5584$, $\quad K_\alpha \doteq (2\text{'}90, \infty)$.
Hipoteze ne moremo zavrniti.