

Izpit iz verjetnosti in statistike

IŠRM

11. junij 2007

1. Petrček sestavlja stolp iz devetih kock. Le-te so treh različnih velikosti, za vsako velikost pa ima eno rdečo, eno modro in eno rumeno. Kocke jemlje v povsem slučajnem vrstnem redu.

- a) Kolikšna je verjetnost, da bodo vse manjše kocke stale na večjih?
- b) Recimo, da vse manjše kocke res stojijo na večjih. Kolikšna je pogojna verjetnost, da nobeni dve kocki iste barve nista skupaj?

2. Stroj ima za isto funkcijo predvidena dva neodvisna sestavna dela in deluje, dokler se oba dela ne pokvarita. Življenjska doba vsakega od delov je porazdeljena zvezno z gostoto:

$$p(t) = \begin{cases} e^{-t} & ; t > 0 \\ 0 & ; \text{sicer} \end{cases}$$

Določite porazdelitev slučajne spremenljivke T , ki pove, koliko časa bo deloval stroj.

3. Iz velike populacije, ki je porazdeljena diskretno po shemi:

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0.3 & 0.4 & 0.3 \end{pmatrix}$$

vzamemo enostaven slučajni vzorec. Najmanj kako velik mora biti, če naj bo verjetnost, da vzorčno povprečje od svojega matematičnega upanja odstopa za manj kot 0.01, enaka najmanj 95%?

4. Populacija je porazdeljena zvezno z naslednjo gostoto:

$$p(x) = \begin{cases} \frac{c(\alpha)}{x^{1+1/\ln \alpha}} & ; x > 1 \\ 0 & ; \text{sicer} \end{cases}$$

kjer je $\alpha > 1$ neznan parameter.

- a) Izračunajte $c(\alpha)$.
- b) Dokažite, da je

$$A_n = \sqrt[n]{X_1 X_2 \dots X_n}$$

kjer je X_1, \dots, X_n enostavni slučajni vzorec iz dane populacije, *pristranska cenilka* za α (A_n je cenilka, ki jo dobimo po *metodi največjega verjetja*).

- c) Dokažite, da je cenilka A_n iz prejšnje točke *asimptotično nepristranska*.