Rešitve izpita iz verjetnosti in statistike z dne 18. 6. 2009

IŠRM

1. *Prvi način.* Slučajna spremenljivka S lahko zavzame vrednosti $6k + r$, kjer je $k = 0, 1, 2, \ldots$ in $r = 1, 2, 3, 4, 5$. Velja:

$$P(S = 6k + r) = \left(\frac{1}{6}\right)^{k+1}$$

oziroma:

$$S \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 7 & 8 & 9 & 10 & 11 & \cdots \\ \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & \frac{1}{36} & \frac{1}{36} & \frac{1}{36} & \frac{1}{36} & \frac{1}{36} & \cdots \end{pmatrix},$$

torej je:

$$E(S) = \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{r=1}^{5} (6k + r) \left(\frac{1}{6}\right)^{k+1} = \sum_{k=0}^{\infty} (30k + 15) \left(\frac{1}{6}\right)^{k+1}.$$

Ob upoštevanju znanih formul:

$$\sum_{k=0}^{\infty} q^k = \frac{1}{1-q}, \quad \sum_{k=0}^{\infty} kq^k = \frac{q}{(1-q)^2}; \qquad -1 < q < 1$$

dobimo:

$$E(S) = \frac{30 \cdot \left(\frac{1}{6}\right)^2}{\left(1 - \frac{1}{6}\right)^2} + \frac{15}{6\left(1 - \frac{1}{6}\right)} = 4{\cdot}2\,.$$

Drugi način. Označimo z N število metov kocke, z R pa število pik, ki so padle pri zadnjem metu. Tedaj je $S = 6(N-1)+R$. Slučajna spremenljivka N je porazdeljena geometrijsko Geo(5/6), zato je $E(N) = 6/5$. Nadalje je zaradi simetrije slučajna spremenljivka R porazdeljena enakomerno na $\{1, 2, 3, 4, 5\}$, zato je $E(R) = 3$. Torej je $E(S) = 6 \cdot \left(\frac{6}{5} - 1\right) + 3 = 4{\cdot}2$.

2. Nastavimo $P(X > Y \mid X > 1) = \dfrac{P(X > Y, X > 1)}{P(X > 1)}$ in računamo:

$$\begin{aligned} P(X > 1) &= \int_1^{\infty} e^{-x}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{e}\,, \\ P(X > Y, X > 1) &= \iint_{\substack{x>y>0 \\ x>1}} e^{-x}\,e^{-y}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \\ &= \int_1^{\infty} \int_0^{x} e^{-y}\,\mathrm{d}y\,e^{-x}\,\mathrm{d}x = \\ &= \int_1^{\infty} (1 - e^{-x})e^{-x}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{e} - \frac{1}{2e^2}\,. \end{aligned}$$

Sledi $P(X > Y \mid X > 1) = 1 - \dfrac{1}{2e} \doteq 0{\cdot}816$.

3. Najprej opazimo, da je $b = 1-2a$. Od tod dobimo, da je $E(X_i) = 1$, ne glede na a, in izračunamo še $D(X_i) = 2a$. Torej je $E(S) = 1000$ in $D(S) = 2000a$. Iz centralnega limitnega izreka dobimo:

$$P(S > 1030) = P(1030{\cdot}5 < S < \infty) \approx \frac{1}{2} - \Phi\left(\frac{1030{\cdot}5 - 1000}{\sqrt{2000a}}\right),$$

torej mora približno veljati:

$$\Phi\left(\frac{30{\cdot}5}{\sqrt{2000a}}\right) = 0{\cdot}45$$

oziroma:

$$\frac{30{\cdot}5}{\sqrt{2000a}} = 1{\cdot}644854\,,$$

kar nam da $a \approx 0{\cdot}171916$ in $b \approx 0{\cdot}656169$.
Če ne upoštevamo popravka s polovičko, dobimo $a \approx 0{\cdot}166325$, $b \approx 0{\cdot}667350$.
Točen rezultat: $a \doteq 0{\cdot}1719568$, $b \doteq 0{\cdot}6560864$.

4. Označimo z Δ razliko v teži posamezne osebe (teža po dieti minus teža pred dieto). Tedaj je $\Delta \sim \mathrm{N}(\mu, \sigma)$ in testiramo ničelno hipotezo, da je $\mu = 0$, proti alternativni hipotezi, da je $\mu < 0$.
Velja $\bar{\Delta} \doteq -5{\cdot}6$, $\quad s \doteq 6{\cdot}433$, $\quad df = 9$, $T \doteq -2{\cdot}75$, $\quad c \doteq (-\infty, -1{\cdot}83]$.
Ničelno hipotezo zavrnemo, torej sprejmemo hipotezo, da dieta deluje.