Rešitve izpita iz verjetnosti in statistike z dne 18. 6. 2010

IŠRM

1. Dogodke, kdo kaj naroči, označimo s črkami A, B, C in D glede na to, kdo naroči, in črkami t, k, p in b v indeksih glede na to, kaj naroči. Tako velja:

$$\begin{aligned} P(D_\mathrm{b} \mid B_\mathrm{k}) &= \frac{P(B_\mathrm{k} \cap D_\mathrm{b})}{P(B_\mathrm{k})} = \\ &= \frac{P(A_\mathrm{t} \cap B_\mathrm{k} \cap C_\mathrm{p}) + P(A_\mathrm{p} \cap B_\mathrm{k} \cap C_\mathrm{t})}{P(A_\mathrm{t} \cap B_\mathrm{k}) + P(A_\mathrm{p} \cap B_\mathrm{k}) + P(A_\mathrm{b} \cap B_\mathrm{k})} = \\ &= \frac{\frac{4}{10} \cdot \frac{4}{7} \cdot \frac{4}{7} + \frac{2}{10} \cdot \frac{4}{8} \cdot \frac{1}{4}}{\frac{4}{10} \cdot \frac{4}{7} + \frac{2}{10} \cdot \frac{4}{8} + \frac{1}{10} \cdot \frac{4}{9}} \doteq 0\text{˙}417. \end{aligned}$$

2. Slučajna spremenljivka Z lahko zavzame kvečjemu vrednosti med 0 in 1. Za $0 < z < 1$ je njena gostota enaka:

$$p_Z(z) = \int_0^\infty p(x)\, p\Big(\frac{x}{z} - x\Big)\, \frac{x}{z^2}\, \mathrm{d}x = \frac{\lambda^2}{z^2} \int_0^\infty x\, e^{-\lambda x/z}\, \mathrm{d}x = 1\,,$$

torej je slučajna spremenljivka Z porazdeljena enakomerno na intervalu $[0, 1]$.

3. Označimo $S = X_2 + X_3 + \cdots + X_{100}$. Tedaj velja:

$$P(X_1 S < 1500) = 0\text{˙}6\, P(10S < 1500) + 0\text{˙}4\, P(11S < 1500)\,.$$

Zaradi neodvisnosti lahko uporabimo centralni limitni izrek. Za $i = 2, \ldots 100$ velja $E(X_i) = 1\text{˙}4$ in $D(X_i) = 0\text{˙}24$, od koder sledi $E(S) = 99 \cdot 1\text{˙}4 \doteq 138\text{˙}6$ in $D(S) = 99 \cdot 0\text{˙}24 \doteq 23\text{˙}76$. Torej približno velja:

$$\begin{aligned} P(X_1 S < 1500) &\approx 0\text{˙}6 \left[\Phi\left(\frac{150 - 138\text{˙}6}{\sqrt{23\text{˙}76}}\right) + \frac{1}{2}\right] + 0\text{˙}4 \left[\Phi\left(\frac{1500/11 - 138\text{˙}6}{\sqrt{23\text{˙}76}}\right) + \frac{1}{2}\right] \doteq \\ &\doteq 0\text{˙}6 \cdot \Phi(2\text{˙}339) - 0\text{˙}4 \cdot \Phi(0\text{˙}459) + \frac{1}{2} \doteq 0\text{˙}7235\,. \end{aligned}$$

Točen rezultat: 0.72619.

4. $\bar{X} \doteq 80\text{˙}0208$, $\bar{Y} \doteq 79\text{˙}9788$, $s \doteq 0\text{˙}0269$, $T \doteq 3\text{˙}47$, $df = 19$,
$K_\alpha = (-\infty, -2.87] \cup [2.87, \infty)$.
Hipotezo zavrnemo.