Rešitve izpita iz verjetnosti in statistike z dne 22. 6. 2012

IŠRM

1. Označimo iskani dogodek z S. Le-ta se lahko zgodi na naslednje tri načine:

- Asistent ne premesti niti Aljaža niti Brigite. Naj bo to dogodek S_0.
- Asistent premesti Aljaža na Cvetovo mesto, Brigite pa ne premesti. Naj bo to dogodek S_1.
- Asistent premesti Aljaža na Brigitino mesto, Brigito na Cvetovo mesto in Cveta na Aljaževo mesto. Naj bo to dogodek S_2.

Verjetnostni prostor lahko razdelimo na $9 \cdot 8 \cdot 7 = 504$ enako verjetne izide – glede na to, katere študente asistent izbere za premestitev in v katerem vrstnem redu. Vsak tak izid lahko torej ponazorimo z zaporedjem črk oblike xyz. Tako zaporedje si lahko predstavljamo kot povelje, naj gre x tja, kjer je bil prej y, y tja, kjer je bil prej z in z tja, kjer je bil prej x. Naj črka A označuje Aljaža, črka B Brigito, črka C Cveta, črke X, Y in Z katerega koli, ki ni Aljaž ali Brigita, črka W pa katerega koli, ki ni Aljaž, Brigita ali Cveto.

- Dogodek S_0 sestavljajo izidi oblike XYZ, ki jih je $7 \cdot 6 \cdot 5 = 210$.
- Dogodek S_1 sestavljajo vsi izidi oblike ACW, WAC in CWA. Teh je $6 \cdot 3 = 18$.
- Dogodek S_2 pa sestavljajo izidi oblike ABC, BCA in CAB, ki so trije.

Iskani verjetnosti sta:

$$P(S) = P(S_0) + P(S_1) + P(S_2) = \frac{210 + 36 + 3}{504} = \frac{231}{504} = \frac{11}{24} \doteq 0{\cdot}458\,,$$

$$P(S_1 \cup S_2 \mid S) = \frac{P(S_1) + P(S_2)}{P(S)} = \frac{18 + 3}{231} = \frac{21}{231} = \frac{1}{11} \doteq 0{\cdot}0909\,.$$

Opomba. Po trije in trije izidi, kot smo jih definirali, določajo enako premestitev. Tako bi lahko za izide vzeli tudi kar premestitve. Teh je $\dfrac{9 \cdot 8 \cdot 7}{3} = 2 \cdot \dbinom{9}{3} = 168$.

2. *Prvi način*: s kumulativno porazdelitveno funkcijo. Za $y < 0$ je očitno $F_Y(y) = P(Y \le y) = 0$, sicer pa je $F_Y(y) = P\big(1 - \sqrt{y} \le X \le 1 + \sqrt{y}\big)$. Sledi:

$$F_Y(y) = \begin{cases} 0 & ; y \le 0 \\ \dfrac{2\sqrt{y}}{3} & ; 0 \le y \le 1 \\ \dfrac{1 + \sqrt{y}}{3} & ; 1 \le y \le 4 \end{cases},$$

kar je zvezna in odsekoma zvezno odvedljiva funkcija, zato je slučajna spremenljivka Y porazdeljena zvezno z gostoto:

$$p_Y(y) = \begin{cases} \dfrac{1}{3\sqrt{y}} & ; 0 < y < 1 \\ \dfrac{1}{6\sqrt{y}} & ; 1 \le y \le 4 \\ 0 & ; \text{sicer} \end{cases} .$$

Drugi način: neposredno z gostoto. Za $y < 0$ očitno lahko postavimo $p_Y(y) = 0$, za $y > 0$ pa velja:

$$p_Y(y) = \frac{1}{2\sqrt{y}} p_X\big(1 - \sqrt{y}\big) + \frac{1}{2\sqrt{y}} p_X\big(1 + \sqrt{y}\big) ,$$

kjer je $p_X(x) = 1/3$, če je $0 < x < 3$, sicer pa je $p_X(x) = 0$. Seveda dobimo isto kot prej.

3. Označimo z S čas, ko podelijo nagrado. Ker je to vsota 10000 neodvisnih slučajnih spremenljivk z isto porazdelitvijo, ki je eksponentna, je $E(S) = 10000 \cdot 8\dot{}6000 = 86000$. Nadalje, ker je standardni odklon eksponentne slučajne spremenljivke enak matematičnemu upanju, je $\sigma(S) = \sqrt{10000} \cdot 8\dot{}6000 = 860$. Iskana verjetnost je torej (približno) enaka:

$$P(S > 86400) \approx \frac{1}{2} - \Phi\left(\frac{86400 - 86000}{860}\right) \doteq \frac{1}{2} - \Phi(0\dot{}465) \doteq 0\dot{}321 .$$

Točen rezultat: 0˙31999.

4. Iz teoretičnih frekvenc:

0.870	4.130
2.435	11.565
6.696	22.304

dobimo vrednost testne statistike $\chi^2 \doteq 1\dot{}59$, kar je manj od kritične vrednposti $\chi^2_{0.95}(2) \doteq 5\dot{}99$. Torej hipoteze ne zavrnemo. To pa bi morali storiti že potem, ko smo za kar nekaj teoretičnih frekvenc dobili premajhno vrednost (pod 5).