Rešitve izpita iz verjetnosti in statistike z dne 27. 6. 2013

IŠRM

1. a) Če s T_A in T_B označimo Aljaževo oz. Brankovo zamudo, velja $\{T \le t\} = \{T_A \le t\} \cup \{T_B \le t\}$, torej je:

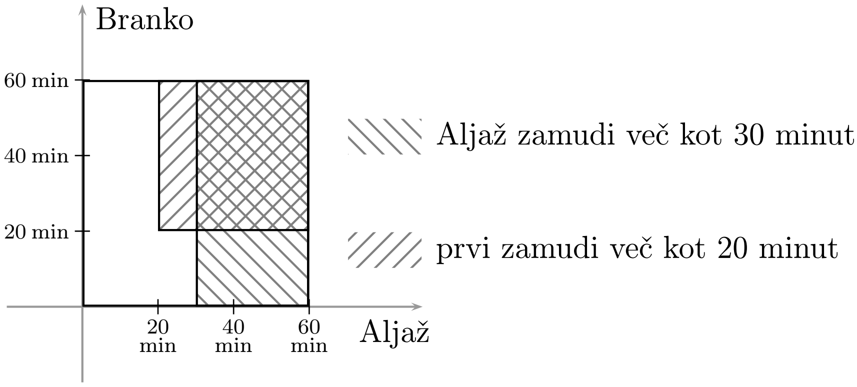
$$F_T(t) = P(T \le t) = P(T_A \le t) + P(T_B \le t) - P(T_1 \le t, T_2 \le t) =$$

$$= \begin{cases} 0 & ; t \le 0 \\ 2t - t^2 & ; 0 \le t \le 1 \\ 1 & ; t \ge 1 \end{cases} .$$

Ta funkcija je zvezna in odsekoma zvezno odvedljiva, zato je T zvezno porazdeljena in ima gostoto:

$$p_T(t) = \begin{cases} 2(1-t) & ; 0 < t < 1 \\ 0 & ; \text{sicer} \end{cases} .$$

b) Dogodka sta prikazana na naslednji sliki:



Iskana pogojna verjetnost je enaka $\dfrac{3 \cdot 4}{4 \cdot 4} = \dfrac{3}{4}$.

2. Dopolnjena tabela:

	$Y=0$	$Y=1$	$Y=2$	$Y=4$	Skupaj
$X=0$	1/40	1/20	3/40	1/20	1/5
$X=2$	1/20	1/10	3/20	1/10	2/5
$X=3$	1/20	1/10	3/20	1/10	2/5
Skupaj	1/8	1/4	3/8	1/4	1

Velja:

$$E(X) = 2\,, \quad D(X) = \frac{6}{5}\,,$$

$$E(Y) = 2\,, \quad D(Y) = \frac{7}{4}\,,$$

$$D(2X+Y) = 4\,D(X) + D(Y) = \frac{131}{20}\,.$$

3. Uporabimo centralni limitni izrek, za uporabo katerega pa je potrebno najprej izračunati matematično upanje in disperzijo. Velja $E(X_i) = 0$ in $D(X_i) = a^2$, od koder sledi $E(S) = 0$ in $D(S) = 500a^2$. Sledi:

$$P(S > 1000) \approx \frac{1}{2} - \Phi\left(\frac{1000}{a\sqrt{500}}\right) = \frac{1}{2} - \Phi\left(\frac{100}{a\sqrt{5}}\right),$$

torej bo moralo približno veljati $\Phi\bigl(100/(a\sqrt{5})\bigr) \approx 0{.}45$ oziroma $100/(a\sqrt{5}) \approx 1{.}645$, kar bo res za $a \approx 27{.}2$.

Opomba. Verjetnosti $P(S > 1000)$ tu ni ustrezno interpretirati kot $P(S > 1000{.}5)$, saj S ne zavzame vrednosti na celoštevilski mreži, temveč na mreži z razponom a. Ker ne vemo, kako glede na to mrežo leži število 1000, popravek ni na mestu (v takih primerih v povprečju dobimo najnatančnejše rezultate, če popravka sploh ne uporabimo).

V resnici za $a \leq 27.02702$ velja $P(S > 1000) < 0.0480523$, za $a \geq 27.02704$ pa velja $P(S > 1000) > 0.0525776$.

4. Izvedemo dvostranski inverzijski (Wilcoxon–Mann–Whitneyjev) test. Za ta namen tabelo najprej dopolnimo:

	do 20	21–40	41–60	61–80	81–100	101 +	Skupaj
Žalec	29	442	788	351	158	324	2092
Žiri	5	61	184	197	169	559	1175
Skupaj	34	503	972	548	327	883	3267
Rangi	1–34	35–537	538–1509	1510–2057	2058–2384	2385–3267	
Vezani rangi	17˙5	286˙0	1023˙5	1783˙5	2221˙0	2826˙0	

Vsota rangov stanovanj v mestnem območju Žalec: 2.825.988
Testna statistika pride $Z \doteq -22{.}89$. Ker je njena absolutna vrednost večja od $z_{0.975} \doteq 1{.}960$, hipotezo zavrnemo.