Rešitve izpita iz verjetnosti in statistike z dne 4. 9. 2008

IŠRM

1. a) Označimo s K_1, K_2 in K_3 dogodke, da imamo v posamezni garnituri na voljo vsaj še 5 kozarcev. Tedaj za $i = 1, 2, 3$ velja:

$$P(K_i) = 0{.}7^6 + 6 \cdot 0{.}3 \cdot 0{.}7^5 .$$

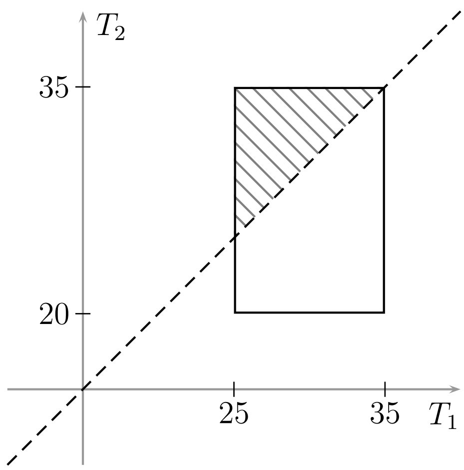
Če s K označimo dogodek, da imamo na voljo vsaj 5 enakih kozarcev, velja $K = K_1 \cup K_2 \cup K_3$. Ker so dogodki K_1, K_2 in K_3 neodvisni, velja:

$$P(K) = 1 - \big(1 - P(K_1)\big)\big(1 - P(K_2)\big)\big(1 - P(K_3)\big) \doteq 0{.}805 .$$

b) Označimo s T dogodek, da smo razbili največ tri kozarce. Ker je $T \subseteq K$, velja:

$$\begin{aligned} P(T \mid K) &= \frac{P(T \cap K)}{P(K)} = \frac{P(T)}{P(K)} = \\ &= \frac{1}{P(K)} \left[0{.}7^{18} + \binom{18}{1} \cdot 0{.}3 \cdot 0{.}7^{17} + \binom{18}{2} \cdot 0{.}3^2 \cdot 0{.}7^{16} + \binom{18}{3} \cdot 0{.}3^3 \cdot 0{.}7^{15} \right] \doteq \\ &\doteq 0{.}204 . \end{aligned}$$

2. a) Označimo z T_1 čas potovanja s prvo, s T_2 pa čas potovanja z drugo progo (s čakanjem vred). Območje, ko Andraž pride prej s prvo kot z drugo progo, je prikazano na sliki:



Ker sta T_1 in T_2 neodvisni in porazdeljeni enakomerno, je tudi slučajni vektor (T_1, T_2) porazdeljen enakomerno po pravokotniku na sliki. Zato je verjetnost iskanega dogodka kar kvocient ploščin, ki je enak $1/3$.

b) Velja $T = T_1 - T_2$. Ker sta T_1 in T_2 porazdeljeni enakomerno, je $E(T_1) = 30$ in $E(T_2) = 27{.}5$ ter $D(T_1) = 100/12$ in $D(T_2) = 225/12$. Zato je $E(T) = E(T_1) - E(T_2) = 2{.}5$ in $D(T) = D(T_1) + D(T_2) = 325/12 \doteq 27{.}08$.

3. Označimo z X število cifer na kovancu po en evro, z Y pa število cifer na kovancu za dva evra. Tedaj sta X in Y neodvisni, $X \sim \mathrm{Bin}(225, 1/2)$, $Y \sim \mathrm{Bin}(100, 1/2)$ in velja $S = X + 2Y$. Ker je S vsota velikega števila neodvisnih dovolj lepih slučajnih spremenljivk, je porazdeljena približno normalno z ustreznim matematičnim upanjem in disperzijo. Velja:

$$\begin{aligned} E(S) &= 225 \cdot \frac{1}{2} + 2 \cdot 100 \cdot \frac{1}{2} = \frac{425}{2} = 212\dot{}5\,, \\ D(S) &= 225 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} + 2^2 \cdot 100 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{625}{4}\,, \\ \sigma(S) &= \frac{25}{2} = 12\dot{}5\,. \end{aligned}$$

Torej je približno $S \sim \mathrm{N}(212\dot{}5, 12\dot{}5)$. Sledi:

$$P(S > 225) = P(225 < S < \infty) \approx \frac{1}{2} - \Phi\left(\frac{225 - 212\dot{}5}{12\dot{}5}\right) \doteq 0\dot{}15866\,.$$

Če upoštevamo, da je S celoštevilska, lahko iskano verjetnost interpretiramo tudi kot:

$$P(S > 225) = P(225\dot{}5 < S < \infty) \approx \frac{1}{2} - \Phi\left(\frac{225 - 212\dot{}5}{12\dot{}5}\right) \doteq 0\dot{}14917\,.$$

Točen rezultat: $0\dot{}1492866$.

4. $\bar{X} = 51$, $\quad s \doteq 2\dot{}138$, $\quad df = 7$, $\quad c_1 \doteq 0\dot{}989$, $\quad c_2 \doteq 20\dot{}3$.
Interval zaupanja: $1\dot{}26 \le \sigma \le 5\dot{}69$.