Rešitve izpita iz verjetnosti in statistike z dne 15. 9. 2009

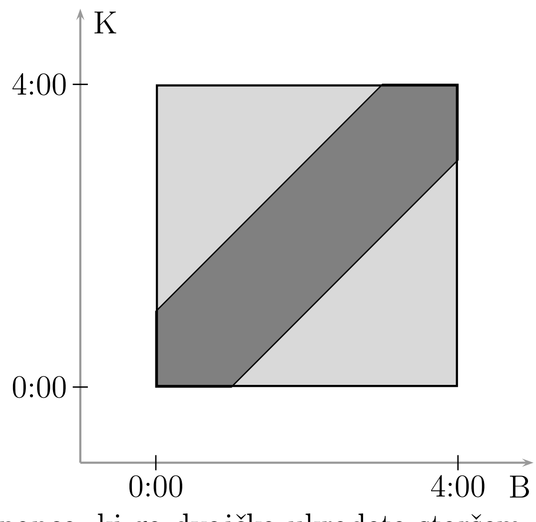
IŠRM

1. Označimo plesalke z A, B, C, plesalce s K, L, M, z X pa še plesalca, ki ga izbere Cirila, če izbere nekoga, ki ni eksplicitno omenjen v nalogi. Nadalje z L_1 oziroma M_1 označimo dogodek, da Luka oziroma Matej pleše z dekletom, ki mu je všeč. Možni izidi so prikazani v naslednji tabeli:

Opis izida	Verjetnost	L_1	M_1
$\mathrm{A+K, B+L, C+M}$	$\frac{1}{2}\cdot 1\cdot\frac{1}{8}=\frac{1}{16}$	✓	✓
$\mathrm{A+K, B+L, C+X}$	$\frac{1}{2}\cdot 1\cdot\frac{7}{8}=\frac{7}{16}$	✓	
$\mathrm{A+M, B+K, C+L}$	$\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot 1=\frac{1}{4}$		✓
$\mathrm{A+M, B+L, C+K}$	$\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot 1=\frac{1}{4}$	✓	✓

Sledi $P(M_1 \mid L_1) = \dfrac{P(M_1\cap L_1)}{P(L_1)} = \dfrac{\frac{1}{16}+\frac{1}{4}}{\frac{1}{16}+\frac{7}{16}+\frac{1}{4}} = \dfrac{5}{8}.$

2. Verjetnostni prostor lahko predstavimo na naslednji način:



Označimo s T čas spanca, ki ga dvojčka ukradeta staršem. Na svetlosivem področju (ki ga označimo z A) je $T=2$, na temnosivem (ki ga označimo z B) pa se T giblje med 1 in 2, in sicer je $T = 1+|X-Y|$, kjer je X čas, ko se zbudi Budimir, Y pa čas, ko se zbudi Kazimir. Nadaljevati je možno na vsaj dva načina.

Prvi način. Ob upoštevanju simetrije računamo:

$$E(T) = 1 + P(A) + \frac{1}{16}\iint_{\substack{0\le x\le 4\\ |x-y|\le 1}} |x-y|\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \frac{25}{16} + \frac{1}{8}\iint_{\substack{0\le x\le 4\\ 0\le x-y\le 1}} (x-y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,.$$

V integralu uvedemo nove koordinate, in sicer x pustimo, namesto y pa uvedemo $u = x - y$. Dobimo:

$$\iint\limits_{\substack{0 \le x \le 4 \\ 0 \le x-y \le 1}} (x-y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \iint\limits_{\substack{0 \le u \le 1 \\ 0 \le x \le 4-u}} u\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \int_0^1 u \int_0^{4-u} \mathrm{d}x\,\mathrm{d}u = \int_0^1 u(4-u)\,\mathrm{d}u = \frac{5}{3}\,.$$

Ko vse skupaj seštejemo, dobimo $E(T) = \dfrac{85}{48}$ (1 h 46 min 15 s).

Drugi način. Pomagamo si s pogojno porazdelitvijo slučajne spremenljivke T glede na dogodek B. Za $1 \le t \le 2$ velja:

$$\begin{aligned} P\big(\{T < t\} \cap B\big) &= P(T < t) = 1 - \frac{(5-t)^2}{16}\,, \\ P(T < t \mid B) &= \frac{16}{7}\left(1 - \frac{(5-t)^2}{16}\right)\,, \\ p_{T|B}(t) &= \frac{2(5-t)}{7}\,. \end{aligned}$$

Sledi:

$$\begin{aligned} E(T \mid B) &= \frac{2}{7}\int_1^2 t(5-t)\,\mathrm{d}t = \frac{31}{21}\,, \\ E(T) &= P(A)\,E(T \mid A) + P(B)\,E(T \mid B) = \frac{9}{16} \cdot 2 + \frac{7}{16} \cdot \frac{31}{21} = \frac{85}{48}\,. \end{aligned}$$

3. a) $E(X_i)\,E(Z_i)\,E(U_i) = 0$, $\quad D(X_i) = E(X_i^2) = E(Z_i^2)\,E(U_i)^2 = D(Z_i)\,E(U_i^2) = \dfrac{5}{2}$.

b) Če označimo $S = X_1 + X_2 + \cdots + X_{100}$, velja $E(S) = 0$ in $D(S) = 250$. Iz centralnega limitnega izreka dobimo:

$$P(S > 7) \approx \Phi(\infty) - \Phi\left(\frac{7}{\sqrt{250}}\right) \doteq \frac{1}{2} - \Phi(0\text{'}44272) \doteq 0\text{'}32898\,.$$

Točen rezultat: 0'328781.

4. $\bar{X} = 52\text{'}5$, $\quad \bar{Y} \doteq 54\text{'}071$, $\quad s \doteq 17\text{'}28$, $\quad df = 18$, $\quad T \doteq 0\text{'}186$.
$K_\alpha = (-\infty, -2\text{'}11] \cup [2\text{'}11, \infty)$. Hipoteze ne moremo zavrniti.