Rešitve izpita iz verjetnosti in statistike z dne 1. 9. 2010

IŠRM

1. a) Označimo z A_z, B_z in C_z dogodke, da si je Andrej, Boris oz. Cveto zapomnil, v kateri škatli je nagrada, z A_o, B_o in C_o pa dogodke, da je Andrej, Boris oz. Cveto odkril nagrado.

Računali bomo verjetnost dogodka, da nihče ni odkril nagrade, t. j. dogodka $\overline{A_\mathrm{o}} \cap \overline{B_\mathrm{o}} \cap \overline{C_\mathrm{o}}$. To bomo izračunali z zaporednimi pogojnimi verjetnostmi. Očitno je $A_\mathrm{o} = A_\mathrm{z}$, torej je $P(\overline{A_\mathrm{o}}) = 0{.}7$. Izračunajmo zdaj $P(\overline{B_\mathrm{o}} \mid \overline{A_\mathrm{o}})$. Če niti Andrej niti Boris nista odkrila nagrade, to pomeni, da si Boris ni zapomnil, kje je nagrada. Torej lahko pišemo $P(\overline{B_\mathrm{o}} \mid \overline{A_\mathrm{o}}) = P(\overline{B_\mathrm{z}} \mid \overline{A_\mathrm{o}})\, P(\overline{B_\mathrm{o}} \mid \overline{A_\mathrm{o}} \cap \overline{B_\mathrm{z}})$. Zaradi neodvisnosti je $P(\overline{B_\mathrm{z}} \mid \overline{A_\mathrm{o}}) = P(\overline{B_\mathrm{z}}) = 0{.}8$. Končno opazimo, da lahko v primeru, če Andrej ni odkril nagrade, Boris pa si ni zapomnil, kje je, Boris odkrije nagrado le v primeru, če je imel v mislih isto škatlo kot Andrej in je potem na slepo odkril pravo škatlo. Sledi $P(\overline{B_\mathrm{o}} \mid \overline{A_\mathrm{o}} \cap \overline{B_\mathrm{z}}) = 1 - \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{4}$ in posledično $P(\overline{B_\mathrm{o}} \mid \overline{A_\mathrm{o}}) = 0{.}8 \cdot \bigl(1 - \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{4}\bigr)$. Podobno dobimo $P(\overline{C_\mathrm{o}} \mid \overline{A_\mathrm{o}} \cap \overline{B_\mathrm{o}}) = 0{.}4 \cdot \bigl(1 - \frac{2}{4} \cdot \frac{1}{3}\bigr)$. Verjetnost, da igralci odkrijejo nagrado, je tako enaka:

$$1 - 0{.}7 \cdot 0{.}8 \cdot \left(1 - \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{4}\right) \cdot 0{.}4 \cdot \left(1 - \frac{2}{4} \cdot \frac{1}{3}\right) = 0{.}825\,.$$

b) Iskana pogojna verjetnost je:

$$\begin{aligned}
P(C_\mathrm{o} \mid A_\mathrm{o} \cup B_\mathrm{o} \cup C_\mathrm{o}) &= \frac{P(\overline{A_\mathrm{o}} \cap \overline{B_\mathrm{o}} \cap C_\mathrm{o})}{P(A_\mathrm{o} \cup B_\mathrm{o} \cup C_\mathrm{o})} = \\
&= \frac{P(\overline{A_\mathrm{o}} \cap \overline{B_\mathrm{o}})\bigl(1 - P(\overline{C_\mathrm{o}} \mid \overline{A_\mathrm{o}} \cap \overline{B_\mathrm{o}})\bigr)}{P(A_\mathrm{o} \cup B_\mathrm{o} \cup C_\mathrm{o})} = \\
&= \frac{0{.}7 \cdot 0{.}8 \cdot \bigl(1 - \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{4}\bigr) \cdot \Bigl(1 - 0{.}4 \cdot \bigl(1 - \frac{2}{4} \cdot \frac{1}{3}\bigr)\Bigr)}{1 - 0{.}7 \cdot 0{.}8 \cdot \bigl(1 - \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{4}\bigr) \cdot 0{.}4 \cdot \bigl(1 - \frac{2}{4} \cdot \frac{1}{3}\bigr)} \doteq \\
&\doteq 0{.}294\,.
\end{aligned}$$

2. $$\begin{aligned}K(X, XY) &= E(X^2 Y) - E(X)\, E(XY) = E(X^2)\, E(Y) - \bigl(E(X)\bigr)^2 E(Y) = \\ &= D(X)\, E(Y) = \frac{1}{24} \doteq 0{.}0417.\end{aligned}$$

3. Ker gre za vsoto veliko neodvisnih in enako porazdeljenih slučajnih spremenljivk, lahko uporabimo centralni limitni izrek. Iz $E(X_i) = 0$ in $D(X_i) = 2a$ dobimo $E(S) = 0$ in $D(S) = 2000a$. Sledi:

$$P(S > 20) = P(S > 20{.}5) \approx \frac{1}{2} - \Phi\left(\frac{20{.}5}{\sqrt{2000a}}\right).$$

Neenakost $P(S > 20) \geq \frac{1}{4}$ torej velja približno za $\Phi\left(\frac{20\text{˙}5}{\sqrt{2000a}}\right) \leq \frac{1}{4}$ oziroma $\frac{20\text{˙}5}{\sqrt{2000a}} \geq 0\text{˙}6745$ oziroma $a \geq 0\text{˙}462$ (zaokroženo navzgor). Približni interval, na katerem velja neenakost, je torej $[0\text{˙}462, 0\text{˙}5]$.

Če ne upoštevamo popravka s polovičko, dobimo $[0\text{˙}440, 0\text{˙}5]$.

V resnici neenakost velja za $a \in [0\text{˙}46174, 0\text{˙}5]$, za $a = 0\text{˙}46173$ pa ne velja več.

4. Iz teoretičnih frekvenc:

1	2	3	4	> 4
50	25	12˙5	6˙25	6˙25

dobimo $\chi^2 \doteq 8\text{˙}72$. Iz $df = 4$ dobimo kritično območje $[9.49, \infty)$, torej hipoteze ne moremo zavrniti.