

Rešitve izpita iz verjetnosti in statistike z dne 6. 9. 2011

IŠRM

1. Naj bo J dogodek, da strelja Janez, F pa dogodek, da strelja Lojze. Nadalje naj bodo Z_1 , Z_2 in Z_3 dogodki, da strelec prvič, drugič oz. tretjič zadene. Tedaj velja:

$$\begin{aligned} P(Z_3 | Z_1 \cap Z_2) &= \frac{P(Z_1 \cap Z_2 \cap Z_3)}{P(Z_1 \cap Z_2)} = \\ &= \frac{P(J) P(Z_1 \cap Z_2 \cap Z_3 | J) + P(L) P(Z_1 \cap Z_2 \cap Z_3 | L)}{P(J) P(Z_1 \cap Z_2 | J) + P(L) P(Z_1 \cap Z_2 | L)} = \\ &= \frac{\frac{1}{2} \cdot 0 \cdot 8^3 + \frac{1}{2} \cdot 0 \cdot 3^3}{\frac{1}{2} \cdot 0 \cdot 8^2 + \frac{1}{2} \cdot 0 \cdot 3^2} \doteq \\ &\doteq 0 \cdot 738. \end{aligned}$$

2. *Prvi način.* Iz $X = YZ$ izračunamo:

$$p_Z(z) = \int_{-\infty}^{\infty} p_{X,Y}(yz, y) |y| dy.$$

Za $z \leq 0$ lahko vzamemo $p_Z(z) = 0$, za $z > 1$ pa velja:

$$p_Z(z) = \int_0^{\infty} y e^{-yz} dy = \frac{1}{z^2}.$$

Torej velja:

$$p_Z(z) = \begin{cases} 1/z^2 & ; z > 1 \\ 0 & ; \text{sicer} \end{cases}.$$

Drugi način. Iz $Y = X/Z$ izračunamo:

$$p_Z(z) = \int_{-\infty}^{\infty} p_{X,Y}\left(x, \frac{x}{z}\right) \frac{|x|}{z^2} dx.$$

Tako kot prej sledi, da za $z \leq 0$ lahko vzamemo $p_Z(z) = 0$, za $z > 1$ pa velja:

$$p_Z(z) = \frac{1}{z^2} \int_0^{\infty} x e^{-x} dx = \frac{1}{z^2}$$

in rezultat je seveda isti kot prej.

3. Iz:

$$E(X_i) = 1, \quad D(X_i) = 2p, \quad E(S) = 100, \quad D(S) = 200p$$

in centralnega limitnega izreka dobimo:

$$P(S < 90) \approx \Phi\left(\frac{89 \cdot 5 - 100}{\sqrt{200p}}\right) + \frac{1}{2}$$

Torej bo $\Phi\left(\frac{10 \cdot 5}{\sqrt{200p}}\right) \approx 0 \cdot 45$ oziroma $\frac{10 \cdot 5}{\sqrt{200p}} \approx 1 \cdot 645$ oziroma $p \approx 0 \cdot 204$.

Točen rezultat: 0'20414.

4. $\bar{X} = 29.85$, $s = 2.695$, $df = 9$, $t_{0.995} = 3.25$, $\Delta = 2.77$.
Interval zaupanja: $27.08 < \sigma < 32.62$.