Rešitve izpita iz verjetnosti in statistike z dne 10. 9. 2012

IŠRM

1. a) Z razdelitvijo rib na lačne postrvi, lačne krape in preostale ribe dobimo, da je verjetnost iskanega dogodka enaka:

$$\frac{\binom{3}{2}\binom{2}{1}\binom{10}{2}+\binom{3}{3}\binom{2}{1}\binom{10}{1}+\binom{3}{2}\binom{2}{2}\binom{10}{1}+\binom{3}{3}\binom{2}{2}\binom{10}{0}}{\binom{15}{5}}=\frac{321}{3003}\doteq 0{\dot{}}104\,.$$

b) $$\frac{\binom{3}{3}\binom{2}{1}\binom{10}{1}+\binom{3}{3}\binom{2}{2}\binom{10}{0}}{\binom{3}{2}\binom{2}{1}\binom{10}{2}+\binom{3}{3}\binom{2}{1}\binom{10}{1}+\binom{3}{2}\binom{2}{2}\binom{10}{1}+\binom{3}{3}\binom{2}{2}\binom{10}{0}}=\frac{21}{321}\doteq 0{\dot{}}00654\,.$$

2. Slučajna spremenljivka Z je porazdeljena zvezno z gostoto:

$$p_Z(z)=\int_{-\infty}^{\infty}p_Y(y)\,p_X(yz)\,|y|\,\mathrm{d}y=\int_1^2\frac{y}{\pi(1+y^2z^2)}\,\mathrm{d}y=\frac{1}{2\pi z^2}\ln\frac{1+4z^2}{1+z^2}\,.$$

3. Naj bo S število Bernardinih zmag minus število Albertovih zmag. Tedaj je $S = X_1 + X_2 + \cdots + X_{1000}$, kjer je:

$$X_i=\begin{cases}-1 & ;\ \text{v } i\text{-ti rundi zmaga Albert}\\ 0 & ;\ i\text{-ta runda je neodločena}\\ 1 & ;\ \text{v } i\text{-ti rundi zmaga Bernarda}\end{cases}\,.$$

V posamezni rundi je možnih 9 kombinacij Albertova in Bernardine izbire in pri treh zmaga Albert, pri treh Bernarda, pri treh pa je igra neodločena. Torej je:

$$X_i\sim\begin{pmatrix}-1 & 0 & 1\\ 1/3 & 1/3 & 1/3\end{pmatrix},\qquad E(X_i)=0\,,\qquad D(X_i)=\frac{2}{3}\,.$$

Po centralnem limitnem izreku je približno $S\sim \mathrm{N}\big(0,\sqrt{2000/3}\big)$. Iskana verjetnost je:

$$P(S\ge 30)=P(29{\dot{}}5<S<\infty)\approx\frac{1}{2}-\Phi\left(\frac{29{\dot{}}5}{\sqrt{2000/3}}\right)\doteq 0{\dot{}}126617\,.$$

Točen rezultat: 0˙1266272.

4. Uporabimo T-test razlike povprečij na dveh populacijah: prva so tisti, ki se jim cene na splošno zdijo previsoke, druga pa tisti, ki se jim zdijo primerne. Odgovore prvih označimo z X_i in populacijsko povprečje z μ_1, medtem ko odgovore drugih označimo z Y_i in populacijsko povprečje z μ_2. Testiramo ničelno hipotezo $\mu_1=\mu_2$ proti alternativni hipotezi $\mu_1<\mu_2$.

Velja $\bar{X}\doteq 0{\dot{}}983$, $\bar{Y}=1{\dot{}}41$, $s\doteq 0{\dot{}}3969$, $T\doteq -4.93$, $t_{0.95}(98)\doteq 1{\dot{}}66$,
zato hipotezo *zavrnemo*. Sklep: tisti, ki se jim cene kave na splošno zdijo previsoke, bi postavili nižjo primerno ceno.