Rešitve kolokvija iz verjetnosti in statistike z dne 1. 12. 2009

FRI–UNI

Soavtor: Peter Nose

1. Če z A označimo dogodek, da ima Pepe škisa, z B pa dogodek, da ni bilo nič sumljivega, velja:

$$P(A \mid B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{\frac{12}{54} + \frac{6}{54} \cdot 0\text{˙}5}{1 - \frac{6}{54} \cdot 0\text{˙}2} = \frac{25}{88} \doteq 0\text{˙}284\,.$$

2. Označimo z A_1 število pik, ki so padle pri prvem metu, in z A_2 število pik, ki so padle pri drugem. Ker imamo 11 različnih izidov, mora biti $P(A_1 + A_2 = k) = 1/11$ za vse $k \in \{2, 3, \ldots, 12\}$. Če še s p_k označimo verjetnost dogodka, da na kocki pade natanko k pik, od tod sledi:

$$
\begin{aligned}
&P(A_1 + A_2 = 2) = p_1^2 = \frac{1}{11}\,, \quad \text{torej} \quad p_1 = \frac{1}{\sqrt{11}} \\
&P(A_1 + A_2 = 3) = p_1 p_2 + p_2 p_1 = \frac{2p_2}{\sqrt{11}} = \frac{1}{11}\,, \quad \text{torej} \quad p_2 = \frac{1}{2\sqrt{11}} \\
&P(A_1 + A_2 = 4) = p_1 p_3 + p_2^2 + p_3 p_1 = \frac{2p_3}{\sqrt{11}} + \frac{1}{44} = \frac{1}{11}\,, \quad \text{torej} \quad p_3 = \frac{3}{8\sqrt{11}}\,.
\end{aligned}
$$

Podobno, če gledamo vsoto pik 12, 11 in 10, dobimo še:

$$p_6 = \frac{1}{\sqrt{11}}\,, \quad p_5 = \frac{1}{2\sqrt{11}}\,, \quad p_4 = \frac{3}{8\sqrt{11}}\,.$$

Toda vsota teh verjetnosti ni enaka 1 (enaka je $15/\big(4\sqrt{11}\big)$), zato takšna obtežitev kocke ne obstaja.

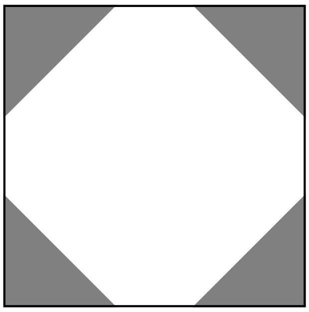
3. Navzkrižna in robni porazdelitvi:

	$Y = -1$	$Y = 0$	$Y = 1$	$Y = 2$	
$X = -1$	0˙04	0˙06	0˙06	0˙04	0˙2
$X = 0$	0˙08	0˙12	0˙12	0˙08	0˙4
$X = 1$	0˙08	0˙12	0˙12	0˙08	0˙4
	0˙2	0˙3	0˙3	0˙2	1

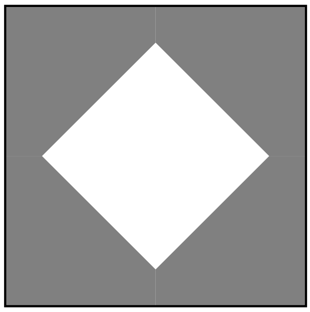
Pogojno porazdelitev slučajne spremenljivke $X - Y$ glede na $X^2 + Y^2 = 1$ lahko zapišemo s porazdelitveno shemo:

$$\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ \frac{9}{19} & \frac{10}{19} \end{pmatrix}.$$

4. Iz oblik dogodka, da je $M < m$, pri $0 \le m \le 1$ in $1 \le m \le 2$:



oziroma



ter razmerij ploščin razberemo kumulativno porazdelitveno funkcijo:

$$p_M(m) = \begin{cases} 0 & ; m \le 0 \\ m^2/2 & ; 0 \le m \le 1 \\ (-m^2 + 4m - 2)/2 & ; 1 \le m \le 2 \\ 1 & ; m \ge 2 \end{cases}$$

in iz nje še porazdelitveno gostoto:

$$p_M(m) = \begin{cases} m & ; 0 \le m \le 1 \\ 2 - m & ; 1 \le m \le 2 \\ 0 & ; \text{sicer} \end{cases} .$$

5. a) Iz eksponentne porazdelitve razberemo, da ima življenjska doba posamezne varovalke gostoto:

$$p(v) = \begin{cases} 5e^{-5v} & ; v > 0 \\ 0 & ; \text{sicer} \end{cases} .$$

Zaradi neodvisnosti je potem gostota porazdelitve slučajnega vektorja (X, Y) enaka:

$$p_{X,Y}(x, y) = \begin{cases} 25e^{-5x-5y} & ; x, y > 0 \\ 0 & ; \text{sicer} \end{cases} .$$

b) Velja $E(X + Y) = E(X) + E(Y) = 2/5$.

6. a) Če z X označimo število grbov, iz Laplaceove integralske formule dobimo:

$$\begin{aligned} P(1764 < X < 1836) &= P(1764^{\cdot}5 < X < 1835^{\cdot}5) \approx \\ &\approx \Phi\left(\frac{1835^{\cdot}5 - 3600 \cdot 0^{\cdot}5}{\sqrt{3600 \cdot 0^{\cdot}5 \cdot 0^{\cdot}5}}\right) - \Phi\left(\frac{1764^{\cdot}5 - 3600 \cdot 0^{\cdot}5}{\sqrt{3600 \cdot 0^{\cdot}5 \cdot 0^{\cdot}5}}\right) = \\ &= 2 \cdot \Phi\left(\frac{35^{\cdot}5}{30}\right) \doteq 0^{\cdot}763323\,. \end{aligned}$$

Točen rezultat: $0^{\cdot}7633273$.

b) Če z n označimo število metov, spet iz Laplaceove integralske formule dobimo:

$$P(0\dot{}45n < X < 0\dot{}55n) \approx \Phi\left(\frac{0\dot{}55\,n - 0\dot{}5\,n}{\sqrt{n \cdot 0\dot{}5 \cdot 0\dot{}5}}\right) - \Phi\left(\frac{0\dot{}45\,n - 0\dot{}5\,n}{\sqrt{n \cdot 0\dot{}5 \cdot 0\dot{}5}}\right) =$$
$$= 2\Phi\big(0\dot{}1\sqrt{n}\big) = 0\dot{}997\,.$$

Iz tega in $0\dot{}997/2 = 0\dot{}4985 \doteq \Phi(2\dot{}9677)$ razberemo, da je zahteva naloge izpolnjena približno za $n > 880\dot{}7$, torej $n \geq 881$.

V resnici je prvo število metov, ki izpolnjuje zahtevo naloge, 871. Toda pozor, 872 zahteve naloge ne izpolnjuje! Prvo število metov, za katerega velja, da vsako večje ali enako število izpolnjuje zahteve naloge, je 888.