Rešitve kolokvija iz verjetnosti in statistike z dne 9. 12. 2011

IŠRM

1. Označimo s H_i dogodek, da je žena odprla i-ti predal, z L dogodek, da je profesorjeva žena našla vsaj en list, z L_2 pa dogodek, da sta v predalu oba lista. Nadalje naj bo p_i verjetnost, da je profesor posamezen list založil v i-ti predal (torej $p_1 = 0{\cdot}6$, $p_2 = 0{\cdot}3$ in $p_3 = 0{\cdot}1$). Tedaj velja:

$$P(L_2 \mid L) = \frac{P(L_2)}{P(L)} = \frac{\sum_{i=1}^3 P(H_i)\, P(L_2 \mid H_i)}{\sum_{i=1}^3 P(H_i)\, P(L \mid H_i)}\,,$$

in nadalje:

$$P(H_i) = \frac{1}{3}\,, \qquad P(L \mid H_i) = 2p_i - p_i^2\,, \qquad P(L_2 \mid H_i) = p_i^2\,.$$

Ko to vstavimo v zgornjo formulo, dobimo $P(L_2 \mid L) \doteq 0{\cdot}299$.

2. Če z S označimo število prvorazrednih izdelkov, je $S \sim \mathrm{Bin}(400, 0{\cdot}2)$. Veljati mora $P(S \geq x) \geq 0{\cdot}95$. Po Laplaceovi integralski formuli je:

$$P(S \geq x) \approx \frac{1}{2} - \Phi\left(\frac{x - \frac{1}{2} - 400 \cdot 0{\cdot}2}{\sqrt{400 \cdot 0{\cdot}2 \cdot 0{\cdot}8}}\right) = \frac{1}{2} - \Phi\left(\frac{x - 80{\cdot}5}{8}\right).$$

Torej približno velja:

$$x = \left\lfloor 80{\cdot}5 - 8 \cdot \Phi^{-1}(0{\cdot}45) \right\rfloor = \left\lfloor 80{\cdot}5 - 8 \cdot 1{\cdot}645 \right\rfloor = 67\,.$$

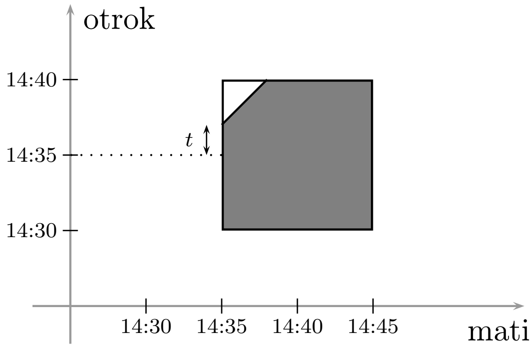
V resnici je $P(S \geq 67) \doteq 0{\cdot}9566512$ in $P(S \geq 68) \doteq 0{\cdot}9432189$.

3. $P(S = 0) = \dfrac{\binom{12}{2}}{\binom{16}{2}} = 0{\cdot}55, \quad P(S = 1) = \dfrac{\binom{2}{1}\binom{12}{1}}{\binom{16}{2}} \doteq 0{\cdot}2,$

$P(S = 2) = \dfrac{\binom{2}{2} + \binom{2}{1}\binom{12}{1}}{\binom{16}{2}} \doteq 0{\cdot}208, \quad P(S = 3) = \dfrac{\left[\binom{2}{1}\right]^2}{\binom{16}{2}} \doteq 0{\cdot}033,$

$P(S = 4) = \dfrac{\binom{2}{2}}{\binom{16}{2}} \doteq 0{\cdot}008.$

4. Očitno mati čaka otroka od 0 do 5 minut. Območje, kjer mati čaka največ t minut ($0 \leq t \leq 5$), je prikazano na sliki:



Za $0 \leq t \leq 5$ bo torej $P(T \leq t) = 1 - \dfrac{(5-t)^2}{200} = \dfrac{175 + 10t - t^2}{200}$. Sledi:

$$F_T(t) = \begin{cases} 0 & ;\ t < 0 \\ (175 + 10t - t^2)/200 & ;\ 0 \leq t \leq 5 \\ 1 & ;\ t \geq 5 \end{cases}.$$

Graf: