

Rešitve kolokvija iz verjetnosti in statistike z dne 14. 12. 2012

IŠRM

1. a) To pomeni, da ob obdarovanju velja ena od naslednjih treh možnosti:

- Gal si je želel medvedka, Nik avtomobilček in Tim kocke;
- Gal si je želel avtomobilček, Nik kocke in Tim medvedka;
- Gal si je želel kocke, Nik medvedka in Tim avtomobilček.

Verjetnost tega dogodka je enaka $0.4 \cdot 0.4 \cdot 0.3 + 0.4 \cdot 0.5 \cdot 0.1 + 0.2 \cdot 0.1 \cdot 0.6 = 0.08$.

b) $\frac{0.4 \cdot 0.4 \cdot 0.3}{0.08} \doteq 0.6$.

2. To pomeni, da nikoli ne zadenemo 20 točk, obenem pa manj kot 20-krat zadenemo eno točko. Verjetnost tega dogodka lahko zapišemo s formulo:

$$p = \sum_{k=0}^{19} \binom{50}{k} \cdot 0.3^k \cdot 0.5^{50-k},$$

ki jo lahko zapišemo tudi v obliki:

$$p = 0.8^{50} \cdot \sum_{k=0}^{19} \binom{50}{k} \left(\frac{0.3}{0.8}\right)^k \left(\frac{0.5}{0.8}\right)^{50-k}$$

in opazimo, da je nova vsota natančno verjetnost, da je slučajna spremenljivka, porazdeljena binomsko $\text{Bin}(50, 0.3/0.8)$ manjša od 20. To pa lahko dobimo tudi tako, da opazimo, da je pogojno na dogodek, da nikoli ne zadenemo 20 točk, število točk porazdeljeno binomsko $\text{Bin}(50, 0.3/0.8)$. Sledi:

$$p \approx 0.8^{50} \left[\Phi \left(\frac{19.5 - 50 \cdot 0.375}{\sqrt{50 \cdot 0.375 \cdot 0.625}} \right) + \frac{1}{2} \right] \doteq 8.374 \cdot 10^{-6}.$$

Točen rezultat: $8.437 \cdot 10^{-6}$.

3. Slučajna spremenljivka X lahko zavzame vrednosti 2, 3, 4 ali 5. Ustrezne dogodke lahko ponazorimo z naslednjimi nizi:

$$\begin{aligned} X = 2: & \quad 1 \searrow, \quad 2 \searrow, \quad 3 \searrow, \quad 4 \searrow \\ X = 3: & \quad 12 \searrow, \quad 13 \searrow, \quad 14 \searrow, \quad 23 \searrow, \quad 24 \searrow, \quad 34 \searrow, \\ X = 3: & \quad 123 \searrow, \quad 124 \searrow, \quad 134 \searrow, \quad 234 \searrow, \\ X = 4: & \quad 1234 \searrow, \end{aligned}$$

kjer puščica pomeni manjše ali enako število. Verjetnost posamezne skupine izidov je $k/4^n$, kjer je k zadnja številka pred puščico, n pa dolžina niza (s puščico vred). Sledi:

$$X \sim \left(\begin{array}{cccc} 2 & 3 & 4 & 5 \\ \frac{10}{16} & \frac{20}{64} & \frac{15}{256} & \frac{4}{1024} \end{array} \right) = \left(\begin{array}{cccc} 2 & 3 & 4 & 5 \\ \frac{5}{8} & \frac{5}{16} & \frac{15}{256} & \frac{1}{256} \end{array} \right) = \left(\begin{array}{cccc} 2 & 3 & 4 & 5 \\ \frac{160}{256} & \frac{80}{256} & \frac{15}{256} & \frac{1}{256} \end{array} \right).$$

$$4. F_Z(z) = \begin{cases} 0 & ; z \leq 0 \\ \frac{2z^2}{5} & ; 0 \leq z \leq 1 \\ \frac{1+z^2}{5} & ; 1 \leq z \leq 2 \\ 1 & ; z \geq 2 \end{cases}, \quad p_Z(z) = \begin{cases} \frac{4z}{5} & ; 0 < z < 1 \\ \frac{2z}{5} & ; 1 < z < 2 \\ 0 & ; \text{sicer} \end{cases}.$$