Rešitve kolokvija iz verjetnosti in statistike z dne 21. 11. 2006

IŠRM

1. a) *Prvi način.*

a) Mislimo si, da najprej posedemo prvega moškega, nato prvo žensko (njegovo ženo), nato drugega moškega itd. Verjetnost, da prva ženska sedi poleg prvega moškega, je $2/5$. Recimo zdaj, da prvi par sedi skupaj. Ne glede na to, kako posedemo drugega moškega, imamo za drugo žensko eno samo možnost od treh, pri kateri vsi trije pari sedijo skupaj. Verjetnost iskanega dogodka je torej $\frac{2}{5} \cdot \frac{1}{3} = \frac{2}{15}$.

b) Mislimo si, da najprej posedemo vse moške. Ne glede na to, kam jih posedemo, je pogojna verjetnost, da prva ženska sedi poleg svojega moža, enaka $2/3$, in ne glede na to, na katero stran jo posedemo, je za drugo žensko ena sama možnost od dveh, pri kateri vsi pari sedijo skupaj. Verjetnost iskanega dogodka je torej $\frac{2}{3} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{3}$.

Drugi način. Ta način deluje v splošnem primeru, ko posedemo n parov.

a) Recimo, da najprej posedemo prvega moškega. Preostale osebe lahko posedemo na $(2n-1)!$ enako verjetnih načinov. Ugodne načine opišemo tako, da najprej povemo, na kateri strani svojega moža sedi prva ženska. Tu sta seveda dve možnosti. Ko to določimo, je jasno, na katerih parih sedežev morajo sedeti (preostali) zakonski pari. Za razporeditev teh parov imamo $(n-1)!$ možnosti. Končno moramo še povedati, na kateri strani bo pri posameznem paru sedel moški in na kateri ženska. Za to imamo 2^{n-1} možnosti. Verjetnost iskanega dogodka je torej $\frac{2^n\,(n-1)!}{(2n-1)!}$.

b) Mislimo si, da najprej posedemo vse moške. Potem lahko ženske posedemo na $n!$ načinov. Ugodna načina pa sta samo dva, in sicer sta natančno določena s tem, na kateri strani svojega moža sedi prva ženska. Verjetnost iskanega dogodka je torej $\frac{2}{n!}$.

2. a) $\dfrac{5 \cdot 2 + 2 \cdot 1 + 3^2 - \frac{1}{2} \cdot 2^2}{25} = \dfrac{19}{25} = 0{\cdot}76$,

b) $\dfrac{2 \cdot 1 + 3^2 - \frac{1}{2} \cdot 2^2}{5 \cdot 2 + 2 \cdot 1 + 3^2 - \frac{1}{2} \cdot 2^2} = \dfrac{9}{19} \doteq 0{\cdot}474$.

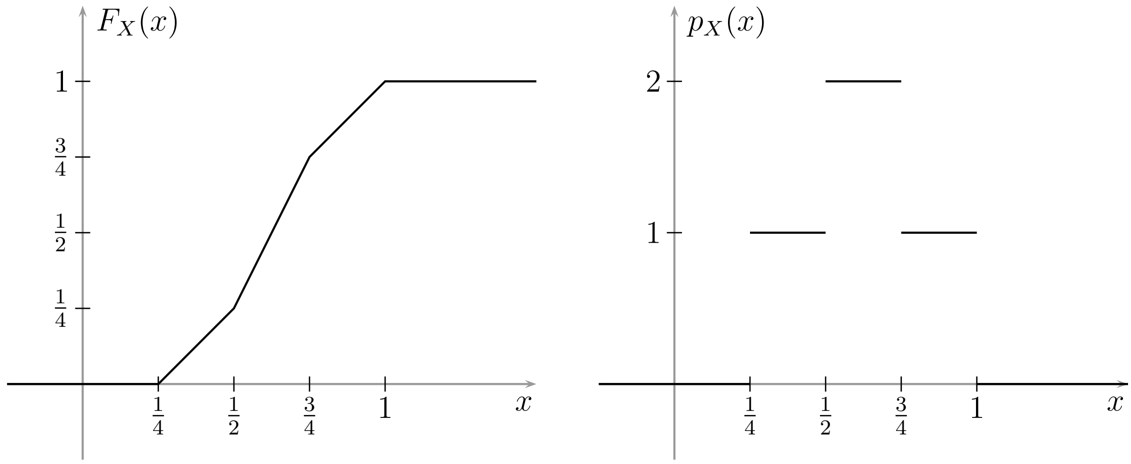
3. Naj bo n število srečk, p pa verjetnost, da je posamezna srečka dobitna. Tedaj mora veljati $(1-p)^n \geq 8\binom{n}{2}p^2(1-p)^{n-2}$, od koder izračunamo:

$$p \leq \frac{1}{1 + 2\sqrt{n(n-1)}}$$

Pri $n = 10^6$ je torej zgornja meja za p približno $5{\cdot}0000000000006 \cdot 10^{-7}$.

Lahko pa računamo tudi po Poissonovem obrazcu. Tedaj dobimo, da mora približno veljati $e^{-np} \geq 8(np)^2 e^{-np}/2!$ oziroma $np \leq 1/2$. Pri $n = 10^6$ mora biti torej približno $p \leq 5 \cdot 10^{-7}$.

4.


$F_X(x)$
1
$\frac{3}{4}$
$\frac{1}{2}$
$\frac{1}{4}$
$\frac{1}{4}$
$\frac{1}{2}$
$\frac{3}{4}$
1
x
$p_X(x)$
2
1
$\frac{1}{4}$
$\frac{1}{2}$
$\frac{3}{4}$
1
x