Rešitve kolokvija iz verjetnosti in statistike z dne 14. 11. 2007

IŠRM

1. a) $1 - 0'7 \cdot 0'4^4 - 0'3 \cdot 0'4^4 - 4 \cdot 0'7 \cdot 0'6 \cdot 0'4^3 = 0'86688$,
b) Vse možne razporeditve barv luči, pri katerih sta vsaj dve zeleni, obenem pa nobeni dve zaporedni nista zeleni, so: ZRZRR, ZRRZR, ZRRRZ, RZRZR, RZRRZ, RRZRZ in ZRZRZ. Od tod dobimo, da je iskana pogojna verjetnost enaka:

$$\frac{3 \cdot 0'3 \cdot 0'6 \cdot 0'4^3 + 3 \cdot 0'7 \cdot 0'6^2 \cdot 0'4^2 + 0'3 \cdot 0'6^2 \cdot 0'4^2}{0'86688} \doteq 0'199\,.$$

2. Označimo z a širino posamezne proge in dolžino igle, s h oddaljenost zgornjega konca igle do najbližnje spodnje rumene proge, na kateri *ni* igle, s φ pa kot med iglo in navpičnico. Tedaj igla v celoti leži na modri progi natanko tedaj, ko je $a \cos\varphi \le h \le a$. Verjetnost je potem enaka:

$$\frac{1}{\pi a} \int_0^{\pi/2} \big(a - a\cos\varphi\big) \mathrm{d}\varphi = \frac{1}{2} - \frac{1}{\pi} \doteq 0'182\,.$$

3. $X \sim \begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 \\ \frac{3}{5} & \frac{3}{10} & \frac{1}{10} \end{pmatrix}$.

4. Naj bo n število posajenih sadik. Po Laplaceovi integralski formuli mora za mejno vrednost parametra n približno veljati:

$$\Phi\left(\frac{0'62\,n - 0'6\,n}{\sqrt{n \cdot 0'6 \cdot 0'4}}\right) - \Phi\left(\frac{0'58\,n - 0'6\,n}{\sqrt{n \cdot 0'6 \cdot 0'4}}\right) = 0'99\,.$$

Po ureditvi dobimo $\Phi\big(\sqrt{n/600}\big) = 0'495$, nakar iz tabele funkcije Φ razberemo $\sqrt{n/600} = 2'575$, od koder dobimo $n = 3978'375$. Torej naj bi ustrezna verjetnost izpolnjevala naš pogoj, brž ko je $n \ge 3979$.
V resnici je dovolj posaditi že 3950 sadik. Toda pozor: ne ustreza *vsak* $n \ge 3950$. Šele za vsak $n \ge 3991$ so zahteve naloge izpolnjene. Nekaj primerov točnih verjetnosti:

$$\begin{aligned} n = 3949: &\quad P(2291 \le S \le 2448) \doteq 0'9897234363 \\ n = 3950: &\quad P(2291 \le S \le 2449) \doteq 0'9901869323 \\ n = 3990: &\quad P(2315 \le S \le 2473) \doteq 0'9898114894 \\ n = 3991: &\quad P(2315 \le S \le 2474) \doteq 0'9902684172 \end{aligned}$$