Rešitve kolokvija iz verjetnosti in statistike z dne 19. 11. 2008

IŠRM

1. a) Označimo s H_1 dogodek, da je druga nogavica iste barve kot prva, s H_2 pa dogodek, da je drugačne barve. Tedaj velja:

$$P(H_1) = 0{\cdot}7 + 0{\cdot}3 \cdot \frac{3}{7}, \qquad P(H_2) = 0{\cdot}3 \cdot \frac{4}{7}.$$

Označimo z A dogodek, da Pepček prinese, tako kot mu je bilo naročeno. Tedaj velja:

$$P(A \mid H_1) = \frac{1 + \binom{4}{2}}{\binom{6}{2}} \qquad P(A \mid H_2) = \frac{3^2}{\binom{6}{2}}$$

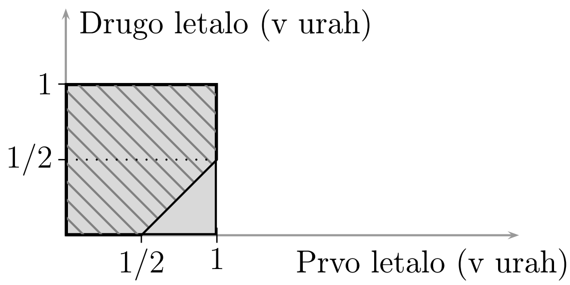
in po izreku o popolni verjetnosti izračunamo:

$$P(A) = P(H_1)\,P(A \mid H_1) + P(H_2)\,P(A \mid H_2) \doteq 0{\cdot}490\,.$$

b) Po Bayesovi formuli izračunamo:

$$P(H_2 \mid A) = \frac{P(H_2)\,P(A \mid H_2)}{P(A)} \doteq 0{\cdot}210\,.$$

2. Zamudi obeh letal ponazorimo s točko v koordinatnem sistemu. Tako dobimo enakomerno porazdelitev na kvadratu s stranico 1 ura, ugodni izidi pa so prikazani na naslednji skici:



Iz ploščine dobimo, da je verjetnost enaka 7/8.

3. Označimo s k število sedežev v predavalnici, z S pa število študentov, ki bodo prišli na kolokvij. Po Laplaceovi integralski formuli mora veljati:

$$P(S > k) = P\big(k + \tfrac{1}{2} < S < \infty\big) \approx \frac{1}{2} - \Phi\left(\frac{k + \frac{1}{2} - 120}{\sqrt{200 \cdot 0{\cdot}6 \cdot 0{\cdot}4}}\right).$$

Desna stran je enaka $0{\cdot}05$ pri $k \doteq 130{\cdot}9$, torej bi moralo biti 131 sedežev dovolj. Tudi v resnici je (do zaokrožitvenih napak) točna verjetnost, da bo prišlo več kot 131 študentov, enaka $0{\cdot}0475$, medtem ko je verjetnost, da bo prišlo več kot 130 študentov, enaka $0{\cdot}0639$.

4. Iz:

$$\int_{-a}^{a} (a^2 - x^2)\,\mathrm{d}x = \frac{4a^3}{3} = 1$$

izračunamo $a = \sqrt[3]{3/4}$. Nadalje za $0 \leq y \leq a^2$ velja:

$$F_Y(y) = P(Y < y) = P(-\sqrt{y} < X < \sqrt{y}) = \int_{-\sqrt{y}}^{\sqrt{y}} (a^2 - x^2)\,\mathrm{d}x = 2a^2\sqrt{y} - \frac{2}{3}\,y^{3/2}\,.$$

Torej je:

$$F_Y(y) = \begin{cases} 0 & ;\ y \leq 0 \\ \sqrt[3]{\frac{9}{2}}\,\sqrt{y} - \frac{2}{3}\,y^{3/2} & ;\ 0 \leq y \leq \sqrt[3]{\frac{9}{16}} \\ 1 & ;\ y \geq \sqrt[3]{\frac{9}{16}} \end{cases}\,.$$