# Rešitve kolokvija iz verjetnosti in statistike z dne 18. 11. 2009

IŠRM

**1.** Čeprav naloga v resnici sprašuje po pogojni verjetnosti, jo brez težav prevedemo na brezpogojno verjetnost: verjetnostni prostor sestavljajo vse možne razporeditve vseh kart razen srčevega asa, za katerega vemo, kje je. Od tod naprej gremo lahko na vsaj dva načina.

*Prvi način.* Označimo z $A$ dogodek, da iz drugega kupa izvlečemo prestavljenega srčevega asa, z $B$ pa dogodek, da povlečemo dve srci. Tedaj velja:

$$P(A) = \frac{2}{9}, \qquad P(B \mid A) = \frac{3}{15} = \frac{1}{5},$$
$$P(\overline{A}) = \frac{7}{9}, \qquad P(B \mid \overline{A}) = \frac{13}{\binom{15}{3}} = \frac{3}{15} \cdot \frac{2}{14} = \frac{1}{35}$$

in iz izreka o popolni verjetnosti sledi:

$$P(B) = P(A)\,P(B \mid A) + P(\overline{A})\,P(B \mid \overline{A}) = \frac{1}{15}.$$

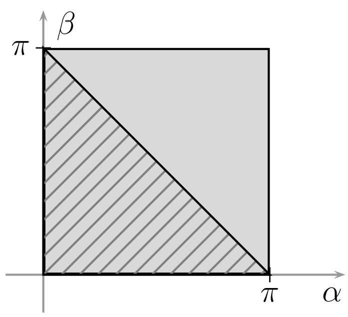
*Drugi način.* Za $i = 0, 1, 2, 3$ označimo s $H_i$ dogodek, da je v drugem kupu poleg prestavljene karte še natanko $i$ src, z $B$ pa tako kot prej dogodek, da povlečemo dve srci. Tedaj velja:

$$P(H_i) = \frac{\binom{8}{i}\binom{7}{3-i}}{\binom{15}{3}} = \frac{\binom{3}{i}\binom{12}{8-i}}{\binom{15}{8}}, \quad P(B \mid H_i) = \frac{\binom{i+2}{2}}{\binom{9}{2}}$$

(med drugim je $P(B \mid H_0) = 0$). Spet po izreku o popolni verjetnosti velja:

$$P(B) = P(H_1)\,P(B \mid H_1) + P(H_1)\,P(B \mid H_2) + P(H_1)\,P(B \mid H_3) = \frac{1}{15}.$$

**2.** Označimo $\alpha := \angle BAC$, $\beta := \angle ABC$ in $\gamma := \angle ACB$. Ker je vsota vseh treh kotov enaka $\pi$, bo kot $\gamma$ manjši od $\pi/2$ natanko tedaj, ko bo $\alpha + \beta > \pi/2$. Območje, kjer to velja, je predstavljeno na naslednji skici:



Iz razmerja ploščin dobimo, da je verjetnost enaka 1/2.

**3.** Označimo z $N$ število ponesrečenih. Če premija znaša $x$ evrov, ima zavarovalnica izgubo natanko tedaj, ko je $N > x$. Torej mora biti $x$ najmanjše število, za katero je $P(N > x) < 0{'}05$. Taka števila so nujno cela. Slučajna spremenljivka $N$ je porazdeljena binomsko $\mathrm{Bin}(1000, 1/500)$ in iz Poissonove aproksimacije dobimo:

$$P(N > 4) \approx 1 - e^{-2}\left(1 + 2 + \frac{2^2}{2!} + \frac{2^3}{3!} + \frac{2^4}{4!}\right) \doteq 0{'}05265\,,$$
$$P(N > 5) \approx 1 - e^{-2}\left(1 + 2 + \frac{2^2}{2!} + \frac{2^3}{3!} + \frac{2^4}{4!} + \frac{2^5}{5!}\right) \doteq 0{'}01656\,.$$

Tudi točnih rezultatov ni težko dobiti:

$$P(N > 4) \doteq 0{'}05247\,, \quad P(N > 5) \doteq 0{'}01646\,.$$

Od tod zaključimo, da mora premija znašati najmanj 5 evrov.

**4.** Naj bo $k \in \mathbb{N}$. Slučajna spremenljivka $X$ je enaka $k$ natanko tedaj, ko je izpolnjen eden izmed naslednjih dveh pogojev:

- v prvih $k - 1$ metih pade le od 3 do 6 pik, v $k$-tem metu pa padeta 2 piki;
- najprej v nekaj (lahko nič) metih pade od 3 do 6 pik, nato pade 1 pika, nakar v nekaj (lahko nič) metih pade od 2 do 6 pik, nazadnje pa v $k$-tem metu spet pade 1 pika.

Verjetnost tega dogodka lahko izračunamo na najmanj dva načina.

*Prvi način.* Neposredno, pri čemer v drugem primeru z $i$ označimo število metov do nevključno prve enojke:

$$P(X = k) = \left(\frac{4}{6}\right)^{k-1} \cdot \frac{1}{6} + \sum_{i=0}^{k-2} \left(\frac{4}{6}\right)^{i} \cdot \frac{1}{6} \cdot \left(\frac{5}{6}\right)^{k-i-2} \cdot \frac{1}{6} = \frac{5^{k-1}}{6^k}\,.$$

Torej je $X$ porazdeljena geometrijsko $\mathrm{Geo}(1/6)$.

*Drugi način.* Pri vseh metih od nevključno prve enojke naprej zamenjamo enojke in dvojke. Ker je kocka poštena, se verjetnosti ne spremenijo. Na ta način problem prevedemo na čakanje na prvo dvojko, torej mora biti $X$ porazdeljena geometrijsko $\mathrm{Geo}(1/6)$.