Rešitve kolokvija iz verjetnosti in statistike z dne 3. 2. 2011

IŠRM

1. a) *Prvi način*: s pomočjo kumulativne porazdelitvene funkcije. Ker je vedno $Y \geq 0$, je za $y < 0$ očitno $F_Y(y) = P(Y \leq y) = 0$. Za $y \geq 0$ pa velja:

$$F_Y(y) = P(Y \leq y) = P\big(\sqrt{|X|} \leq y\big) = P(|X| \leq y^2) = P -y^2 \leq |X| \leq y^2) =$$
$$= \frac{1}{\pi}\int_{-y^2}^{y^2} \frac{\mathrm{d}x}{1+x^2} = \frac{2}{\pi}\operatorname{arctg} y^2 \,.$$

Sledi:

$$p_Y(y) = F_Y'(y) = \begin{cases} \dfrac{4y}{\pi(1+y^4)} & ;\ y > 0 \\ 0 & ;\ \text{sicer} \end{cases} \,.$$

Drugi način: z uporabo formule $p_Y(y) = \sum_{x; f(x)=y} \dfrac{p_X(x)}{|f'(x)|}$. Če postavimo $f(x) = \sqrt{|x|}$, za $y < 0$ enačba $f(x) = y$ ni rešljiva na x, torej je tam $p_Y(y) = 0$. Za $y > 0$ pa ima enačba dve rešitvi, $x = -x^2$ in $x = y^2$. Ker je $f'(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{|x|}}$ za $x > 0$ in $f'(x) = -\dfrac{1}{2\sqrt{|x|}}$ za $x < 0$, iz vsega skupaj dobimo:

$$p_Y(y) = p_X(-y^2)\cdot 2\sqrt{|-y^2|} + p_X(y^2)\cdot 2\sqrt{|y^2|} = \frac{4y}{\pi(1+y^4)} \,.$$

Dobljena gostota je seveda ista kot pri prvem načinu.

b) Ker je Y zvezno porazdeljena in je njena gostota na intervalu $(0,\infty)$ strogo pozitivna, drugje pa enaka nič, lahko nastavimo kar $F_Y(m) = \frac{1}{2}$, torej $\frac{2}{\pi}\operatorname{arctg} m^2 = \frac{1}{2}$, torej $\operatorname{arctg}(m^2) = \frac{\pi}{4}$, torej $m^2 = 1$. Ker Y živi na $(0,\infty)$, mora biti $m = 1$.

2. Iz:

$$\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} p_{X,Y}(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = c\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\left(\frac{1}{x^4y^5} + \frac{1}{x^5y^4}\right)\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \frac{c}{6} = 1$$

izračunamo $c = 6$. Nadalje je:

$$E(X) = 6\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} x\left(\frac{1}{x^4y^5} + \frac{1}{x^5y^4}\right)\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \frac{17}{12}\,,$$
$$E(X^2) = 6\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} x^2\left(\frac{1}{x^4y^5} + \frac{1}{x^5y^4}\right)\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \frac{5}{2}\,,$$
$$D(X) = \frac{5}{2} - \left(\frac{17}{12}\right)^2 = \frac{71}{144}$$

in zaradi simetrije je tudi $E(Y) = 5/2$ in $D(Y) = 71/44$. Končno je:

$$\begin{aligned}
E(XY) &= 6\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} xy\left(\frac{1}{x^4y^5} + \frac{1}{x^5y^4}\right) \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = 2\,, \\
K(X,Y) &= 2 - \left(\frac{17}{12}\right)^2 = -\frac{1}{144}\,, \\
r(X,Y) &= \frac{-\frac{1}{144}}{\sqrt{\frac{71}{144}\cdot\frac{71}{144}}} = -\frac{1}{71} \doteq 0{\dot{}}0141\,.
\end{aligned}$$

3. Ker gre za povprečje veliko neodvisnih in enako porazdeljenih slučajnih spremenljivk, lahko uporabimo centralni limitni izrek, zanj pa potrebujemo matematično upanje in disperzijo. Znano je, da je $E(X_i) = 1/\lambda$ in $D(X_i) = 1/\lambda^2$. Sledi $E(\bar{X}) = 1/\lambda$ in $D(\bar{X}) = 1/(n\lambda)$. Torej je:

$$P\big(\bar{X} > 1{\dot{}}01\,E(\bar{X})\big) \approx \frac{1}{2} - \Phi\left(\frac{1{\dot{}}01/\lambda - 1/\lambda}{\sqrt{1/(n\lambda)}}\right) = \frac{1}{2} - \Phi\big(0{\dot{}}01\sqrt{n}\big)\,.$$

Za mejno vrednost števila n mora torej približno veljati $0{\dot{}}01\sqrt{n} = \Phi^{-1}(0{\dot{}}45) \doteq 1{\dot{}}645$, od koder dobimo $n \doteq 27060{\dot{}}25$. Torej bi rekli, da želena trditev velja za $n \geq 27061$. Kot pokažejo natančnejši izračuni, pa mora biti v resnici $n \geq 27169$.

4. $\bar{X} = 113{\dot{}}1$, $\quad s \doteq 12{\dot{}}71$, $\quad SE \doteq 4{\dot{}}021$, $\quad df = 9$, $\quad t_{0.995} \doteq 3{\dot{}}25$, $\quad \Delta \doteq 13{\dot{}}07$.
Interval zaupanja: $100{\dot{}}0 < \mu < 126{\dot{}}2$.