

Rešitve kolokvija iz verjetnosti in statistike z dne 17. 1. 2007

IŠRM

1. Velja $p_Z(z) = \int_{-\infty}^{\infty} p_X(x) p_Y\left(\frac{z}{x}\right) \frac{dx}{x}$.

Meje dobimo iz pogojev $1 \leq x \leq 2$, $1 \leq \frac{z}{x} \leq 2$.

Za $1 \leq z \leq 2$ dobimo $p_Z(z) = \int_1^z \frac{dx}{x} = \ln z$.

Za $2 \leq z \leq 4$ dobimo $p_Z(z) = \int_{z/2}^2 \frac{dx}{x} = 2 \ln 2 - \ln z$.

Torej je:

$$p_Z(z) = \begin{cases} \ln z & ; 1 \leq z \leq 2 \\ 2 \ln 2 - \ln z & ; 2 \leq z \leq 4 \\ 0 & ; \text{sicer} \end{cases}$$

2. Najprej za vsak $\lambda \in \mathbb{R}$ izračunamo:

$$E(e^{\lambda X}) = E(e^{\lambda Y}) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{\lambda x - x^2/2} dx = \frac{e^{\lambda^2/2}}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{(x-\lambda)^2/2} dx = e^{\lambda^2/2}$$

Nato izračunamo:

$$\begin{aligned} K(e^X, e^{X+Y}) &= E(e^X e^{X+Y}) - E(e^X) E(e^{X+Y}) = \\ &= E(e^{2X}) E(e^Y) - E(e^X) E(e^X) E(e^Y) = \\ &= e^{5/2} - e^{3/2} \doteq 7.70. \end{aligned}$$

3. Iz centralnega limitnega izreka dobimo:

$$E(X_i) = E(\bar{X}) = 1, \quad D(X_i) = 0.6, \quad D(\bar{X}) = 0.006.$$

Torej m izberemo tako, da velja $\Phi\left(\frac{m-1}{\sqrt{0.006}}\right) \approx 0.95$, kar nam da $m \doteq 1.13$.

Dejansko je $P(\bar{X} < 1.13) \doteq 0.943$ in $P(\bar{X} \leq 1.13) \doteq 0.956$.

4. $\bar{X} = 5.1$, $s \doteq 0.2138$, $df = 7$, $c \doteq 3.50$, $\Delta \doteq 0.26$.

Interval zaupanja: $4.84 \leq \mu \leq 5.36$.