Rešitve kolokvija iz verjetnosti in statistike z dne 23. 1. 2009

IŠRM

1. *Prvi način*: iz izražave $Y = X/Z$ za $z \neq 0$ dobimo:

$$p_Z(z) = \int_{-\infty}^{\infty} p_{X,Y}\left(x, \frac{x}{z}\right) \left|\frac{x}{z^2}\right| \, \mathrm{d}x \, .$$

Ko vstavimo gostoto, pri čemer upoštevamo, da se pogoj $0 \le Y \le 1$ pozna pri mejah, dobimo:

$$p_Z(z) = \frac{1}{z^2\sqrt{2\pi}} \int_0^z x\, e^{-x^2/2} \, \mathrm{d}x = \frac{1 - e^{-z^2/2}}{z^2\sqrt{2\pi}} \, .$$

Za $z = 0$ lahko predpišemo kar koli. Če recimo postavimo $p_Z(0) := 1/\big(2\sqrt{2\pi}\big)$, dosežemo, da je gostota zvezna.

Drugi način: iz izražave $X = YZ$ dobimo:

$$p_Z(z) = \int_{-\infty}^{\infty} p_{X,Y}(yz, y)|y| \, \mathrm{d}y \, .$$

Ko vstavimo gostoto, dobimo:

$$p_Z(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^1 e^{-y^2z^2/2} \, \mathrm{d}y = \begin{cases} \dfrac{1 - e^{-z^2/2}}{z^2\sqrt{2\pi}} & ; \, z \neq 0 \\ \dfrac{1}{2\sqrt{2\pi}} & ; \, z = 0 \end{cases} .$$

2. Velja $E(X_i) = 2$ in $D(X_i) = 2{\cdot}8$, od koder dobimo $E(S) = 1000$ in $D(S) = 1400$. Iz centralnega limitnega izreka sledi, da mora približno veljati:

$$P(S < 950) = P(949{\cdot}5 < S < \infty) \approx \frac{1}{2} - \Phi\left(\frac{50{\cdot}5}{\sqrt{1400}}\right) \doteq 0{\cdot}08856 \, .$$

Točen rezultat: $0{\cdot}088340$.

3. a) Iz $E(X_i) = a$ izračunamo $E\big(\hat{a}(k)\big) = kna$, od koder dobimo, da je cenilka nepristranska za $k = 1/n$. To je opazljiva količina (neodvisna od neznanega parametra a), zato res dobimo cenilko.

b) Računamo po formuli $q\big(\hat{a}(k)\big) = D\big(\hat{a}(k)\big) + B\big(\hat{a}(k)\big)^2$. Iz $D(X_i) = a^2$ dobimo $D\big(\hat{a}(k)\big) = k^2na^2$, iz $E\big(\hat{a}(k)\big) = kna$ pa dobimo $B\big(\hat{a}(k)\big) = a(kn-1)$. Sledi:

$$q\big(\hat{a}(k)\big) = a^2(k^2n + k^2n^2 - 2kn + 1) \, ,$$

kar je najmanjše pri $k = 1/(n+1)$.

Cenilka, pri kateri je srednja kvadratična napaka najmanjša, je torej pristranska.

4. $\bar{X} = 52$, $\bar{X} = 49{\cdot}5$, $s \doteq 2{\cdot}069$, $df = 16$, $T \doteq 2{\cdot}547$,
$K_\alpha \doteq (-\infty, -2{\cdot}12) \cup (2{\cdot}12, \infty)$.
Hipotezo zavrnemo.