Rešitve kolokvija iz verjetnosti in statistike z dne 15. 1. 2010

FRI–UNI

Avtor: Peter Nose

1. a) Velja:

$$P(S_1 = 1) = \frac{2}{6} = \frac{1}{3} \qquad P(S_1 = 4) = \frac{4}{6} \cdot \frac{3}{5} \cdot \frac{2}{4} \cdot \frac{2}{3} = \frac{2}{15}$$

$$P(S_1 = 2) = \frac{4}{6} \cdot \frac{2}{5} = \frac{4}{15} \qquad P(S_1 = 5) = \frac{4}{6} \cdot \frac{3}{5} \cdot \frac{2}{4} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{2}{2} = \frac{1}{15}$$

$$P(S_1 = 3) = \frac{4}{6} \cdot \frac{3}{5} \cdot \frac{2}{4} = \frac{1}{5},$$

torej je:

$$E(S_1) = 1 \cdot \frac{1}{3} + 2 \cdot \frac{4}{15} + 3 \cdot \frac{1}{5} + 4 \cdot \frac{2}{15} + 5 \cdot \frac{1}{15} = \frac{7}{3}.$$

b) $E(K_1) = E(S_1) = \frac{7}{3}$.

c) Velja:

$$\begin{aligned} E(S_2 \mid S_1 = 2) &= \sum_{s=3}^{6} s \cdot P(S_2 = s | S_1 = 2) \\ &= 3 \cdot \frac{1}{4} + 4 \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{3} + 5 \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{2} + 6 \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{1} = 4{\cdot}5. \end{aligned}$$

d) Velja:

$$\begin{aligned} E(S_1 K_1) &= \sum_{s=1}^{6} \sum_{k=1}^{6} s \cdot k \cdot P(S_1 = s, K_1 = k) = 2 \cdot \sum_{s=1}^{5} \sum_{k=s+1}^{5} s \cdot k \cdot P(S_1 = s, K_1 = k) \\ &= 2 \cdot \Bigg(1 \cdot 2 \cdot \frac{2}{6} \cdot \frac{2}{5} + 1 \cdot 3 \cdot \frac{2}{6} \cdot \frac{3}{5} \cdot \frac{2}{4} + 1 \cdot 4 \cdot \frac{2}{6} \cdot \frac{3}{5} \cdot \frac{2}{4} \cdot \frac{2}{3} + 1 \cdot 5 \cdot \frac{2}{6} \cdot \frac{3}{5} \cdot \frac{2}{4} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{2}{2} + \\ &\quad + 2 \cdot 3 \cdot \frac{2}{6} \cdot \frac{2}{5} \cdot \frac{2}{4} + 2 \cdot 4 \cdot \frac{2}{6} \cdot \frac{2}{5} \cdot \frac{2}{4} \cdot \frac{2}{3} + 2 \cdot 5 \cdot \frac{2}{6} \cdot \frac{2}{5} \cdot \frac{2}{4} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{2}{2} + \\ &\quad + 3 \cdot 4 \cdot \frac{2}{6} \cdot \frac{1}{5} \cdot \frac{2}{4} \cdot \frac{2}{3} + 3 \cdot 5 \cdot \frac{2}{6} \cdot \frac{1}{5} \cdot \frac{2}{4} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{2}{2} \Bigg) = \\ &= \frac{217}{45} \doteq 4{\cdot}82, \end{aligned}$$

$$K(S_1, K_1) = E(S_1 K_1) - E(S_1)\, E(K_1) = \frac{217}{45} - \frac{7}{3} \cdot \frac{7}{3} = -\frac{28}{45} \doteq -0{\cdot}62.$$

2. *Metoda momentov.* Pri tej metodi moramo vse neznane parametre izraziti z začetnimi momenti. Ker je populacija porazdeljena binomsko, vemo pa, da je matematično upanje binomske porazdelitve enako np, lahko takoj izračunamo prvi začetni moment $z_1 = E(X) = 5p$. Od tod sledi $p = z_1/5$ in $\hat{p} = \hat{z_1}/5 = \overline{X}/5$. Iz vzorca najprej izračunajmo povprečje:

$$\overline{X} = \frac{1+2+3+4+5+4+3+2+3+4+3}{11} = \frac{34}{11}$$

in od tod vrednost cenilke $\hat{p} = 34/55 \doteq 0^{\cdot}618$ za parameter p.

Metoda največjega verjetja. Pri tej metodi določimo parametre tako, da ima vzorec največjo verjetnost. Zato najprej s pomočjo vzorca izrazimo verjetje L.

$$\begin{aligned} L = {} & \left(\binom{5}{1} p^1 (1-p)^4\right)^1 \cdot \left(\binom{5}{2} p^2 (1-p)^3\right)^2 \cdot \left(\binom{5}{3} p^3 (1-p)^2\right)^4 \cdot \\ & \cdot \left(\binom{5}{4} p^4 (1-p)^1\right)^3 \cdot \left(\binom{5}{5} p^5 (1-p)^0\right)^1 \\ = {} & \binom{5}{1}^1 \binom{5}{2}^2 \binom{5}{3}^4 \binom{5}{4}^3 \binom{5}{5}^1 p^{34} (1-p)^{21} \\ = {} & \mathrm{const} \cdot p^{34} (1-p)^{21}\,. \end{aligned}$$

Ker iščemo maksimum verjetja po parametru p, odvajamo $\log L$ po parametru p:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial p} \log L &= \frac{\partial}{\partial p} \left(\log \mathrm{const} + \log p^{34} + \log (1-p)^{21}\right) \\ &= \frac{\partial}{\partial p} \left(\log \mathrm{const} + 34 \log p + 21 \log (1-p)\right) = \\ &= 0 + \frac{34}{p} + \frac{21}{1-p}(-1)\,. \end{aligned}$$

Če obe strani zadnje enačbe množimo z $p(1-p)$, dobimo oceno $\hat{p} = 34/55 \doteq 0^{\cdot}618$ za parameter p.

3. Uporabimo obrazec za interval zaupanja za μ pri znanem σ. Tako moramo izračunati:

$$\begin{aligned} \overline{X} &= \frac{13+12+11+15+7+8+7+8+9}{9} = 10\,, \\ c &= t_{(1+\beta)/2} = t_{(1+0.99)/2} = t_{0.995} \doteq 2^{\cdot}58 \text{ pri } df = \infty \\ \Delta &= \frac{c\sigma}{\sqrt{n}} = \frac{2^{\cdot}58 \cdot 4}{\sqrt{9}} = 3^{\cdot}44 \end{aligned}$$

(zaokroženo navzgor). Iskani interval zaupanja je torej $(\overline{X} - \Delta, \overline{X} + \Delta) =$
$= (6^{\cdot}56, 13^{\cdot}44)$.

4. Testiramo ničelno hipotezo $H_0 : \sigma^2 = 0˙1$ proti alternativni hipotezi $H_1 : \sigma^2 < 0˙1$ pri stopnji značilnosti $\alpha = 0˙1$. Velja:

$$\overline{X} = \frac{5˙7 + 6˙2 + 6˙4 + 5˙8 + 6˙2 + 5˙9 + 5˙7 + 6˙1}{8} = 6$$

$$(n-1) \cdot s^2 = (5˙7 - 6)^2 + (6˙2 - 6)^2 + (6˙4 - 6)^2 + (5˙8 - 6)^2 + \\ + (6˙2 - 6)^2 + (5˙9 - 6)^2 + (5˙7 - 6)^2 + (6˙1 - 6)^2 = 0˙48$$

$$\chi^2 = \frac{(n-1)s^2}{\sigma_0^2} = \frac{0˙48}{0˙1} = 4˙8\,.$$

Kritično območje pri $\alpha = 0˙1$ in $df = 8 - 1 = 7$ je $K_\alpha = [0, 2˙83]$. Ker testna statistika ne pade v kritično območje, ničelne hipoteze ne zavrnemo.