Rešitve kolokvija iz verjetnosti in statistike z dne 30. 3. 2012

IŠRM

1. *Prvi način*: za $y \geq 0$ velja:

$$F_Y(y) = P(Y \leq y) = P\big(-\sqrt{y} \leq X \leq \sqrt{y}\big)\,.$$

Ker X zavzame le vrednosti od -2 naprej, moramo ločiti dva primera. Za $0 \leq y \leq 4$ velja:

$$F_Y(y) = \int_{-\sqrt{y}}^{\sqrt{y}} e^{-x-2}\,\mathrm{d}x = e^{\sqrt{y}-2} - e^{-\sqrt{y}-2}\,,$$

za $y \geq 4$ pa:

$$F_Y(y) = \int_{-2}^{\sqrt{y}} e^{-x-2}\,\mathrm{d}x = 1 - e^{-\sqrt{y}-2}\,,$$

Če povzamemo, velja:

$$F_Y(y) = \begin{cases} 0 & ;\ y \leq 0 \\ e^{\sqrt{y}-2} - e^{-\sqrt{y}-2} & ;\ 0 \leq y \leq 4 \\ 1 - e^{-\sqrt{y}-2} & ;\ y \geq 4 \end{cases}\,.$$

Drugi način: iz formule za transformacijo gostote sledi:

$$p_Y(y) = \frac{1}{2\sqrt{y}}\Big(p_X\big(-\sqrt{y}\big) + p_X\big(\sqrt{y}\big)\Big)\,.$$

Sledi:

$$p_Y(y) = \begin{cases} \frac{1}{2\sqrt{y}}\Big(e^{\sqrt{y}-2} + e^{-\sqrt{y}-2}\Big) & ;\ 0 < y < 4 \\ \frac{1}{2\sqrt{y}}\, e^{\sqrt{y}-2} & ;\ y > 4 \\ 0 & ;\ \text{sicer} \end{cases}\,.$$

Ni težko preveriti, da si kumulativna porazdelitvena funkcija iz prvega načina in gostota iz drugega načina ustrezata.

2. Velja:

$$\begin{aligned} D\big((X+Y)^2\big) &= E\big((X+Y)^4\big) - \Big[E\big((X+Y)^2\big)\Big]^2 = \\ &= E(X^4) + 4\,E(X^3)\,E(Y) + 6\,E(X^2)\,E(Y^2) + 4\,E(X)\,E(Y^3) + E(Y^4) - \\ &\quad - \Big[E(X^2) + 2\,E(X)\,E(Y) + E(Y^2)\Big]\,. \end{aligned}$$

Iz momentov:

$$E(X^k) = E(Y^k) = \int_0^1 u^k\,\mathrm{d}u = \frac{1}{k+1}$$

po nekaj računanja dobimo $D\big((X+Y)^2\big) = \dfrac{127}{180}$.

3. Če z S označimo število uspelih poskusov, lahko zapišemo $S = X_1 + X_2 + \cdots + X_N$, kjer je:

$$X_i \sim \left(\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2/3 & 1/3 \end{pmatrix}\right),$$

slučajna spremenljivka N pa je porazdeljena geometrijsko Geo(1/2). Le-ta ima rodovno funkcijo:

$$G_1(s) = \frac{s}{2-s},$$

sumandi X_i pa imajo rodovno funkcijo:

$$G_2(s) = \frac{2+s}{3}.$$

Ker so sumandi neodvisni, ima vsota S rodovno funkcijo:

$$G_1(G_2(s)) = \frac{2+s}{4-s} = \frac{1}{2} + \frac{3}{2}\left(\frac{s}{4} + \frac{s^2}{16} + \frac{s^3}{64} + \cdots\right),$$

torej je $P(S = 3) = 3/128 \doteq 0{'}0234$.

4. Pišimo:

$$\begin{aligned} P(S > 20) = P(X_0 = -1)\, P(S > 20 \mid X_0 = -1) + P(X_0 = 0)\, P(S > 20 \mid X_0 = 0) + \\ + P(X_0 = 2)\, P(S > 20 \mid X_0 = 2)\,. \end{aligned}$$

Če označimo $T = X_1 + X_2 + \cdots X_{100}$, torej $S = X_0 T$, nadalje velja:

$$\begin{aligned} P(S > 20) &= \frac{1}{3}\, P(T < -20) + \frac{1}{6}\, P(T > 10) = \\ &= \frac{1}{3}\, P(-\infty < T < -20{'}5) + \frac{1}{6}\, P(10{'}5 < T < \infty)\,. \end{aligned}$$

Ker je $E(X_i) = 0$, $D(X_i) = 1$ ter posledično $E(T) = 0$, $D(T) = 400$ in $\sigma(T) = 20$, iz centralnega limitnega izreka dobimo:

$$P(S > 20) \approx \frac{1}{3}\left(\frac{1}{2} - \Phi\left(\frac{20{'}5}{20}\right)\right) + \frac{1}{6}\left(\frac{1}{2} - \Phi\left(\frac{10{'}5}{20}\right)\right) \doteq 0{'}1009\,.$$

Točen rezultat: 0'10049.