Rešitve kolokvija iz verjetnosti in statistike z dne 29. 3. 2013

IŠRM

1. Iz izražave $Y = XZ$ sledi:

$$
\begin{aligned}
p_Z(z) &= \int_{-\infty}^{\infty} p_{X,Y}(x, xz)\,|x|\,\mathrm{d}x = \\
&= \frac{2}{\pi} \int_{x^2+x^2z^2\le 1} (1 - x^2 - x^2z^2)\,\mathrm{d}x = \\
&= \frac{2}{\pi} \int_{-(1+z^2)^{-1/2}}^{(1+z^2)^{-1/2}} (1 - x^2 - x^2z^2)\,\mathrm{d}x = \\
&= \frac{1}{\pi(1+z^2)}\,.
\end{aligned}
$$

Slučajna spremenljivka Z ima torej standardno Cauchyjevo porazdelitev.

2. Korelacijski koeficient je enak:

$$
\begin{aligned}
r(X,Y) &= \frac{E(XY) - E(X)\,E(Y)}{\sqrt{E(X^2) - \big(E(X)\big)^2}\,\sqrt{E(Y^2) - \big(E(Y)\big)^2}} = \\
&= \frac{P(A\cap B) - P(A)\,P(B)}{\sqrt{P(A) - \big(P(A)\big)^2}\,\sqrt{P(B) - \big(P(B)\big)^2}}\,,
\end{aligned}
$$

torej je:

$$
\frac{4}{5} = \frac{P(A\cap B) - \frac{1}{6}}{\sqrt{\frac{1}{4}}\,\sqrt{\frac{2}{9}}}\,,
$$

od koder sledi:

$$
P(A\cap B) = \frac{1}{6} + \frac{4}{5}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{\sqrt{2}}{3} = \frac{1}{6} + \frac{2\sqrt{2}}{15} \doteq 0{\dot{}}355\,.
$$

3. Rodovna funkcija števila potomcev v prvi generaciji je:

$$
G_1(s) = e^{\lambda(s-1)}\,,
$$

rodovna funkcija števila potomcev posameznega potomca v prvi generaciji pa je:

$$
G_2(s) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\big(1 - e^{-\lambda}\big)^k s^k}{k\lambda} = -\frac{1}{\lambda}\ln\Big(1 - \big(1 - e^{-\lambda}\big)s\Big)\,.
$$

Rodovna funkcija števila potomcev v drugi generaciji pa je:

$$G_1(G_2(s)) = e^{-\{\ln[1-(1-e^{-\lambda})s]+1\}} = \frac{e^{-\lambda}}{1-\left(1-e^{-\lambda}\right)s} = e^{-\lambda}\sum_{k=0}^{\infty}\left(1-e^{-\lambda}\right)^k s^k\,.$$

Če z S_2 označimo število potomcev v drugi generaciji, torej velja:

$$P(S_2 = k) = e^{-\lambda}\left(1-e^{-\lambda}\right)^k\,; \quad k = 0, 1, 2, \ldots$$

kar pomeni, da gre za geometrijsko porazdelitev $\mathrm{Geo}(e^{-\lambda})$, premaknjeno za ena v levo.

4. Iz:

$$E(X_i) = \int_0^1 x\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\,, \qquad E(X_i^2) = \int_0^1 x^2\,\mathrm{d}x = \frac{1}{3}\,, \qquad D(X_i) = \frac{1}{3} - \frac{1}{4} = \frac{1}{12}$$

sledi:

$$E(S) = 12\,, \qquad D(S) = 2\,.$$

Po centralnem limitnem izreku (ki je pri enakomerni porazdelitvi zelo natančen, zato ga lahko uporabimo tudi za majhno število seštevancev) velja:

$$P(S < x) \approx \frac{1}{2} + \Phi\left(\frac{x-12}{\sqrt{2}}\right)\,,$$

torej bo $\Phi\left(\frac{x-12}{\sqrt{2}}\right) \approx -0\text{˙}45$ oziroma $\frac{x-12}{\sqrt{2}} \approx -1\text{˙}645$ oziroma $x \approx 12 - 1\text{˙}645 \cdot \sqrt{2} \doteq 9\text{˙}67$.