13. Rodovne funkcije

Naj bo X sluč. sprem. z vrednostmi v $\mathbb{N} \cup \{0\}$:

$$p_k = P(X=k), \quad k=0,1,2,\dots, \quad p_k \geq 0, \quad \sum_k p_k = 1$$

Rodovna funkcija je

$$G_X(s) = p_0 + p_1 \cdot s + p_2 s^2 + \dots = \sum_{k=0}^{\infty} p_k \cdot s^k$$

za $s \in \mathbb{R}$, za katere vrsta abs. konvergira.

Očitno $G_X(0) = p_0$, $G_X(1) = \sum_{k=0}^{\infty} p_k = 1$

in $G_X(s) = E(s^X)$, saj je

$$s^X : \begin{pmatrix} 1 & s & s^2 & s^3 & \cdots \\ p_0 & p_1 & p_2 & p_3 & \cdots \end{pmatrix}$$

Zaradi $G_X(1) = 1$ vrsta abs. konv. vsaj za $s \in [-1, 1]$:

$$\sum_{k=0}^{\infty} p_k |s^k| \leq \sum_{k=0}^{\infty} p_k = 1 \text{. Konv. radij } \geq 1.$$

Zgleda 1) $X \sim \text{Geo}(p)$: $p_k = P(X=k) = p \cdot q^{k-1}$

$k = 1, 2, \dots$ $\quad q = 1 - p$

$$G_X(s) = \sum_{k=1}^{\infty} p \cdot q^{k-1} \cdot s^k = p \cdot s \sum_{k=1}^{\infty} (q \cdot s)^{k-1} =$$

$$= \frac{p \cdot s}{1 - q \cdot s}, \quad \text{če } |q \cdot s| < 1, \text{ torej } |s| < \frac{1}{q}$$

2) $X \sim \text{Poi}(\lambda)$: $p_k = P(X=k) = \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}$

$k = 0, 1, 2, \dots$

$$G_X(s) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda} \cdot s^k = e^{-\lambda} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\lambda \cdot s)^k}{k!} =$$

$= e^{-\lambda} \cdot e^{\lambda \cdot s} = e^{\lambda(s-1)}$ za vse $s \in \mathbb{R}$.

Iz teorije Taylorjevih vrst sledi

<u>Izrek o enoličnosti</u> Naj imata X in Y rodovni funkciji G_X in G_Y. Potem je $G_X(s) = G_Y(s)$ za vse $s \in [-1, 1] \iff P(X=k) = P(Y=k)$ za vse k.

Tedaj je
$$P(X=k) = \frac{G_X^{(k)}(0)}{k!}$$

Izrek Naj ima X rodovno funkcijo $G_X(s)$. Potem je $G_X^{(n)}(1-) := \lim_{s\uparrow 1} G_X^{(n)}(s) =$

$$E\big(X(X-1)(X-2)\cdots(X-n+1)\big)$$

Dokaz Za $s \in [0,1)$ velja

$$G_X^{(n)}(s) = \left(\sum_{k=0}^{\infty} p_k \cdot s^k\right)^{(n)} = \sum_{k=n}^{\infty} p_k \cdot k(k-1)\cdots(k-n+1)\cdot s^{k-n}$$

$$= E\left(X(X-1)\cdots(X-n+1)\cdot s^{X-n}\right).$$ Ko gre $s \uparrow 1$, z uporabo Abelove leme dobimo

$$G_X^{(n)}(1-) = \sum_k p_k\, k(k-1)\cdots(k-n+1) = E\big(X(X-1)\cdots(X-n+1)\big)$$

Posl. $E(X) = G_X'(1-)$

$$D(X) = E(X(X-1)) + E(X) - (E(X))^2 =$$
$$= G_X''(1-) + G_X'(1-) - (G_X'(1-))^2$$

Izrek Naj bosta X in Y neodvisni sl. spremen. z rod. funkcijama G_X in G_Y. Potem je

$$G_{X+Y}(s) = G_X(s) \cdot G_Y(s) \quad \text{za } s \in [-1,1]$$

Dokaz: $G_{X+Y}(s) = E(s^{X+Y}) = E(s^X \cdot s^Y) \underset{\text{izrek}}{=}$

$= E(s^X) \cdot E(s^Y) = G_X(s) \cdot G_Y(s)$, saj sta

sl. sprem. s^X in s^Y neodvisni.

Posplošitev: Za neodvisne sl. sprem. $X_1, \dots, X_n$ velja

$$G_{X_1+\dots+X_n}(s) = G_{X_1}(s) \cdots G_{X_n}(s) \quad \text{za } s \in [-1, 1]$$

Če so $X_1, \dots, X_n$ enako porazdeljeni, potem je

$$G_{X_1+\dots+X_n}(s) = \left(G_X(s)\right)^n$$

Izrek Naj bodo za vsak $n \in \mathbb{N}$ sl. sprem. $N, X_1, X_2, \dots, X_n$ neodvisne. Naj ima N rodovno funkcijo G_N, X_n pa G_X. Potem ima sluč. sprem.

$$S = X_1 + X_2 + \dots + X_N$$ rodovno funkcijo

$$G_S(s) = G_N(G_X(s)) \quad \text{za } s \in [-1,1], \text{ torej}$$

$$G_S = G_N \circ G_X$$

Dokaz Zaradi neodvisnosti imamo $P(S=k) =$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} P(S=k, N=n) = \sum_{n} P(N=n, X_1+\dots+X_n=k) \overset{\text{neodv.}}{=}$$

$$= \sum_n P(N=n) \cdot P(X_1 + \dots + X_n = k).$$ Zato je

$$G_S(s) = \sum_k P(S=k) \cdot s^k = \sum_n P(N=n) \cdot$$

$$\cdot \sum_k P(X_1 + \dots + X_n = k) \cdot s^k = \sum_n P(N=n) \cdot G_{X_1+\dots+X_n}(s) =$$

$$= \sum_n P(N=n) \cdot \left(G_X(s)\right)^n = G_N\left(G_X(s)\right)$$

<u>Posl.</u> $E(S) = E(N) \cdot E(X)$ WALDOVA ENAKOST

D: $E(S) = G_S'(1) = G_N'\big(\overbrace{G_X(1)}^{1}\big) \cdot G_X'(1) = E(N) \cdot E(X).$

<u>Zgled</u> Kokoš, N jajc, $N \sim Poi(\lambda)$

K število piščancev

$X_i : \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ q & p \end{pmatrix}$: $X_i = 1$, če se iz i-tega jajca izvali piščanec. Potem $K = X_1 + X_2 + \ldots + X_N$

$G_N(s) = e^{\lambda(s-1)}$, $G_X(s) = q + p \cdot s$

Po izreku: $G_K(s) = G_N(G_X(s)) = e^{\lambda(q + p \cdot s - 1)} =$

$= e^{\lambda(p \cdot s - p)} = e^{\lambda \cdot p(s-1)}$. Zaradi enol. $K \sim Poi(\lambda \cdot p)$

14. Momentno rodovna funkcija

$M_X(t) = E\left(e^{t\cdot X}\right)$ za $t \in \mathbb{R}$, za katere obstaja mat. upanje. Če ima X vrednosti v $\mathbb{N} \cup \{0\}$, potem $M_X(t) = E\left(\left(e^t\right)^X\right) = G_X(e^t)$. Če je X zvezno porazdeljena, potem je $M_X(t) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{t\cdot x} \cdot p_X(x)\,dx$ Laplaceova transformacija

Zgled $X \sim N(0,1)$

$$M_X(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{tx} \cdot e^{-\frac{x^2}{2}}\, dx =$$

$$= e^{\frac{t^2}{2}} \underbrace{\left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{1}{2}(x-t)^2}\, dx \right)^{=1}}_{\text{gostota za } N(t,1)} = e^{\frac{t^2}{2}}$$