zap. $\{X_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ <u>konvergira skoraj gotovo</u> proti sl. sprem. X, če $P(\lim_{n\to\infty} X_n = X) = 1$, kjer je

$$(\lim X_n = X) = \{\omega\in\Omega : \lim_{n\to\infty} X_n(\omega) = X(\omega)\} =$$

$$= \{\omega : \forall k\in\mathbb{N}\ \exists m\in\mathbb{N}\ \forall n\geq m : |X_n(\omega)-X(\omega)| < \tfrac{1}{k}\} =$$

$$= \bigcap_{k=1}^{\infty}\bigcup_{m=1}^{\infty}\bigcap_{n=m}^{\infty}\{\omega : |X_n(\omega)-X(\omega)| < \tfrac{1}{k}\}$$

dogodek, saj je števen presek in unija dogodkov.

__Trditev__ Če $X_n \xrightarrow[n\to\infty]{} X$ skoraj gotovo, potem za vsak $\varepsilon > 0$ velja

$$\lim_{m\to\infty} P\left(|X_n - X| < \varepsilon \text{ za vse } n \geq m \right) = 1.$$

__Dokaz__ Def. $C_m = \left(|X_n - X| < \varepsilon \text{ za vse } n \geq m \right) = \bigcap_{n=m}^{\infty} \left(|X_n - X| < \varepsilon \right)$. Potem $C_1 \subseteq C_2 \subseteq C_3 \subseteq \ldots$ in $\left(\lim_{n\to\infty} X_n = X\right) \subseteq \bigcup_{m=1}^{\infty} C_m$. Torej imamo

$$1 = P\left(\lim_{n\to\infty} X_n = X\right) \leq P\left(\bigcup_{m=1}^{\infty} C_m\right) = \lim_{m\to\infty} P(C_m),$$

od koder sledi trditev.

Posl. Če $X_n \underset{n\to\infty}{\Longrightarrow} X$ s.g., potem $X_n \to X$ verjetnostno.

Dokaz.

$$\underbrace{P\big(|X_n - X| < \varepsilon \text{ za vse } n \geq m\big)}_{\substack{\downarrow\, m\to\infty \quad \text{po trditvi} \\ 1}} \leq P\big(|X_m - X| < \varepsilon\big)$$

$$\Rightarrow \lim_{m\to\infty} P\big(|X_m - X| < \varepsilon\big) = 1, \text{ torej } X_n \to X \text{ verj.}$$

Obratna implikacija ne velja.

Naj bo $\{X_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ zap. sluč. sprem., ki imajo mat. upanja.

Def. $S_n = X_1 + X_2 + \dots + X_n$ in

$$Y_n = \frac{S_n - E(S_n)}{n} = \frac{X_1 + \dots + X_n}{n} - \frac{E(X_1) + \dots + E(X_n)}{n}$$

Potem $E(Y_n) = 0$ za vsak $n \in \mathbb{N}$.

Za $\{X_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ velja <u>šibki zakon velikih števil</u> (ŠZVŠ), če $Y_n \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$ verjetnostno, torej za vsak $\varepsilon > 0$ je

$$P\left(\left|\frac{S_n - E(S_n)}{n}\right| < \varepsilon\right) \xrightarrow[n\to\infty]{} 1.$$

Za $\{X_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ velja krepki zakon vel. števil (KZVŠ), če $Y_n \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$ skoraj gotovo,

torej $P\left(\frac{S_n - E(S_n)}{n} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0\right) = 1$

Če velja KZVŠ, potem velja ŠZVŠ.

Zgled met kocke, X_k število pik v k-tem metu, $X_k : \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} \end{pmatrix}$, $E(X_k) = \frac{7}{2}$

$\frac{S_n}{n}$ je povprečje za prvih n metov

KZVŠ pomeni: $\frac{S_n}{n} = \frac{X_1 + \dots + X_n}{n} \xrightarrow[n \to \infty]{} \frac{7}{2}$

skoraj gotovo

Izrek a) Če sl. spren. X ima mat. upanje, potem velja neenakost Markova

$$P(|X| \geq a) \leq \frac{E(|X|)}{a} \quad \text{za } a > 0.$$

b) Če X ima disperzijo, potem velja neenakost Čebiševa:

$$P\big(|X - E(X)| \geq a \cdot \sigma(X)\big) \leq \frac{1}{a^2}$$

za vse $a > 0$.