Izrek (a) $$P(|X| \geq a) \leq \frac{E(|X|)}{a}$$

$a > 0$, <u>neenakost Markova</u>

(b) $$P(|X - E(X)| \geq a \cdot \sigma(X)) \leq \frac{1}{a^2}, \quad a > 0$$

oziroma, če pišemo $\varepsilon = a \cdot \sigma(X)$:

$$P(|X - E(X)| \geq \varepsilon) \leq \frac{D(X)}{\varepsilon^2}$$ <u>neen. Čebiševa</u>

Dokaz (zvezna primer)

$$E(|X|) = \int_{-\infty}^{\infty} |x|\, p(x)\, dx \geq \int_{|x| \geq a} \underbrace{|x|}_{\geq a} p(x)\, dx \geq a \cdot \int_{|x| \geq a} p(x)\, dx =$$

$= a \cdot P(|X| \geq a)$

(b) Neenakost Markova uporabimo za $(X-E(X))^2$:

$$P(|X-E(X)| \geq \varepsilon) = P((X-E(X))^2 \geq \varepsilon^2) \underset{\text{Markova}}{\leq}$$

$$\leq \frac{E((X-E(X))^2)}{\varepsilon^2} = \frac{D(X)}{\varepsilon^2}$$

<u>Izrek</u> Naj bo $\{X_n\}_n$ zap. sl. sprem. in $S_n = X_1 + \ldots + X_n$.

Če $\frac{D(S_n)}{n^2} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$, potem za $\{X_n\}_n$ velja ŠZVŠ, tj.

(<u>Izrek Markova</u>) $Y_n = \frac{S_n - E(S_n)}{n} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$ verjetnostno, tj.

$\forall \varepsilon > 0 \quad P\left(\frac{|S_n - E(S_n)|}{n} \geq \varepsilon\right) \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$

<u>Dokaz</u> V neenakosti Čebiševa vzamemo $X = \frac{S_n}{n}$:

$$P\left(\frac{|S_n - E(S_n)|}{n} \geq \varepsilon\right) \leq \frac{D(S_n)}{n^2 \cdot \varepsilon^2} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0 .$$

<u>Posl.</u> (izrek Čebiševa)

Naj bodo $\{X_n\}_n$ parovna nekorelirane sl. sprem. in $\sup_n D(X_n) < \infty$. Potem za $\{X_n\}_n$ velja ŠZVŠ.

<u>Dokaz</u> Pišimo $C := \sup_n D(X_n)$. Zaradi nekorel. je $D(S_n) = D(X_1) + \dots + D(X_n) \leq n \cdot C$ in zato

$$\frac{D(S_n)}{n^2} \leq \frac{n \cdot C}{n^2} = \frac{C}{n} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0,$$

torej lahko uporabimo izrek Markova.

<u>Zgled</u> Bernoullijevo zaporedje neodvisnih ponovitev poskusa, $p = P(A) \in (0,1)$. Priredimo sl. spremen.: $(X_k = 1)$ je dogodek, da se v k-ti ponovitvi zgodi dog. A, sicer je $X_k = 0$. Torej $X_k : \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ q & p \end{pmatrix}$

Potem je $S_n = X_1 + \dots + X_n$ frekvenca dog. A v n ponovitvah. Ker so X_k enako porazdeljene in neodvisne, velja ŠZVŠ po izreku Čebiševa. Ker je $E(S_n) = n \cdot p$, je torej

$$P\left(\frac{|S_n - np|}{n} < \varepsilon \right) \xrightarrow[n \to \infty]{} 1 \text{ oziroma}$$

$$P\left(\left|\frac{S_n}{n}-p\right|<\varepsilon\right) \xrightarrow[n\to\infty]{} 1$$

$\frac{S_n}{n}$ je rel. frekvenca dog. A. To je

<u>Bernoulliev zakon velikih števil</u> iz 1713.

<u>Izrek Kolmogorova</u>

Naj bo $\{X_n\}_n$ zap. neodv. sluč. spr., za katere

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{D(X_n)}{n^2} < \infty$. Potem za $\{X_n\}_n$ velja KZVŠ, tj.

$$P\left(\frac{S_n-E(S_n)}{n} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0\right)=1$$

Posebej to velja, če je $\sup_n D(X_n) < \infty$, saj vrsta $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ konvergira.

<u>Zgled</u> Bernoulliev primer: $X_k : \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ q & p \end{pmatrix}$

Po izreku velja KZVŠ:

$$\frac{S_n - np}{n} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0 \quad \text{skoraj gotovo oziroma}$$

$$\frac{S_n}{n} \xrightarrow[n\to\infty]{} p \quad \text{s.g. tj } P\left(\lim_{n\to\infty} \frac{S_n}{n} = p\right) = 1.$$

To je posplošitev Bernoulliejevega zakona.

16. Centralni limitni izrek

Naj bo $\{X_n\}_n$ zap. sl. sprem. in $S_n = X_1 + X_2 + \dots + X_n$.
Standardiziramo S_n:

$$Z_n = \frac{S_n - E(S_n)}{\sigma(S_n)}.$$ Potem $E(Z_n) = 0$ in $D(S_n) = 1$.

<u>Centralni limitni izrek</u> (CLI) – osnovna varianta

Če so $\{X_n\}_n$ neodvisne in enako porazdeljene, potem za vsak $x \in \mathbb{R}$ velja

$$F_{Z_n}(x) = P\left(\frac{S_n - E(S_n)}{\sigma(S_n)} \leq x\right) \xrightarrow[n \to \infty]{} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} e^{-t^2/2}\, dt =$$

$$= F_{N(0,1)}(x) = \frac{1}{2} + \Phi(x)$$

V dokazu uporabimo <u>izrek o zveznosti za rodovne funkc.</u>

Če za sl. spremen. Z_n velja

$$M_{Z_n}(t) = E\left(e^{t \cdot Z_n}\right) \xrightarrow[n\to\infty]{} e^{\frac{t^2}{2}} = M_{N(0,1)}(t)$$

za vse $t \in (-\delta, \delta)$ pri nekem $\delta > 0$, potem

$$F_{Z_n}(x) \xrightarrow[n\to\infty]{} F_{N(0,1)}(x) \quad \text{za vse } x \in \mathbb{R}.$$

<u>Dokaz CLI</u> v primeru, ko $\{X_n\}$ imajo momentno rod. funkcijo $M_X(t) = E(e^{t \cdot X})$ na neki okolici točke 0.

Naj bo $E(X) = \mu$, $\sigma(X) = \sigma$ in $U_n = X_n - \mu$.

Tak $E(U)=0$, $\sigma(U)=\sigma$ in

$$M_U(t) = M_X(t)\cdot e^{-\mu\cdot t} = E\left(e^{t\cdot U}\right)$$

$$= E\left(1+t\cdot U+\frac{t^2}{2!}U^2+\dots\right) = 1+\frac{t^2}{2}\sigma^2+o(t^2),$$

kde $\lim\limits_{u\to 0}\frac{o(u)}{u}=0$. Když $D(S_n)=D(X_1)+\dots+D(X_n)=$

$=n\cdot\sigma^2$ in $E(S_n)=n\mu$, je

$$Z_n=\frac{S_n-E(S_n)}{\sigma(S_n)}=\frac{U_1+U_2+\dots+U_n}{\sigma\cdot\sqrt{n}}.$$ Zato je

$$M_{Z_n}(t)=E\left(e^{t\cdot Z_n}\right)=E\left(e^{\frac{t}{\sigma\cdot\sqrt{n}}(U_1+\dots+U_n)}\right)=\left(M_U\left(\frac{t}{\sigma\sqrt{n}}\right)\right)^n$$