$$M_{Z_n}(t) = E\left(e^{t \cdot Z_n}\right) = E\left(e^{\frac{t}{\sigma\sqrt{n}}(U_1 + \ldots + U_n)}\right) =$$

$$= E\left(e^{\frac{t}{\sigma\sqrt{n}} U_1} \ldots e^{\frac{t}{\sigma\sqrt{n}} U_n}\right) = \left(E\left(e^{\frac{t}{\sigma\sqrt{n}} \cdot U}\right)\right)^n =$$

$$= \left(M_U\left(\frac{t}{\sigma\sqrt{n}}\right)\right)^n.$$ Ker je $M_U(t) = 1 + \frac{t^2}{2}\sigma^2 + o(t^2)$,

imamo torej $$M_{Z_n}(t) = \left(1 + \frac{t^2}{2n} + o\left(\frac{1}{n}\right)\right)^n \xrightarrow[n \to \infty]{} e^{\frac{t^2}{2}}$$ pri fiksnem t. Po zadnjem izreku je

$$F_{Z_n}(x) \xrightarrow[n \to \infty]{} F_{N(0,1)}(x)$$ za vsak $x \in \mathbb{R}$.

Lema Če $x_n \xrightarrow[n\to\infty]{} x$, potem $\left(1+\frac{x_n}{n}\right)^n \xrightarrow[n\to\infty]{} e^x$.

V splošnem se CLI dokaže s pomočjo **karakterističnih funkcij**:

$$\varphi_X(t) = E\left(e^{i\cdot t\cdot X}\right) = E\left(\cos(t\cdot X)\right) + i\,E\left(\sin(t X)\right)$$

$\varphi_X : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$. Če je X zvezno porazdeljena, potem je $\varphi_X(t) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\cdot t\cdot x} \cdot p_X(x)\,dx$

Fourierova transformacija

Naj bodo $\{X_n\}_n$ enako porazdeljene in neodvisne:
$E(X_n) = \mu$ in $\sigma(X_n) = \sigma$. Potem $E(S_n) =$
$= E(X_1) + \dots + E(X_n) = n \cdot \mu$ in $D(S_n) = n \cdot \sigma^2$.
Po CLI je pri velikih n porazdelitev

$$Z_n = \frac{S_n - E(S_n)}{\sigma(S_n)} = \frac{S_n - n \cdot \mu}{\sigma \cdot \sqrt{n}} \approx N(0,1),$$

torej $S_n \approx N(n\mu, \sigma \cdot \sqrt{n})$ oziroma

$$\overline{X} = \frac{S_n}{n} = \frac{X_1 + \dots + X_n}{n} \approx N\left(\mu, \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right)$$

Če so $\{X_n\}_n$ v CLI normalno porazdeljeni, potem za vsak n velja $Z_n \sim N(0,1)$ oziroma

$\bar{X} \sim N\left(\mu, \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right)$ (če $X_n \sim N(\mu, \sigma)$)

Laplaceova formula je poseben primer CLI:

$$X_k : \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ q & p \end{pmatrix}, \quad S_n = X_1 + \dots + X_n \sim Bin(n, p)$$

$$Z_n = \frac{S_n - E(S_n)}{\sigma(S_n)} = \frac{S_n - np}{\sqrt{npq}} \approx N(0,1) \text{ pri velikih } n$$

$$P(S_n \leq x) = P\left(Z_n \leq \frac{x - np}{\sqrt{npq}}\right) \approx \frac{1}{2} + \Phi\left(\frac{x-np}{\sqrt{npq}}\right)$$

$$P(\alpha < S_n \leq \beta) = P(S_n \leq \beta) - P(S_n \leq \alpha) \approx$$
$$\Phi\left(\frac{\beta - np}{\sqrt{npq}}\right) - \Phi\left(\frac{\alpha - np}{\sqrt{npq}}\right).$$

<u>Primer</u> V vrečo vržemo 20 kostanjev.
Naj bo X_k teža k-tega kostanja, $k = 1, 2, \ldots, 20$.
Smiselno je privzeti, da so to neodvisne in enako porazd. sl. sprem. Teža vreče $S_{20} = X_1 + X_2 + \ldots + X_{20}$ ima približno normalno porazdelitev. ADITIVEN EFEKT

II. STATISTIKA

1. Osnovni pojmi

Kot vedo statistiko delimo na:

1. opisno statistiko: zbiranje, razvrščanje, prikazovanje podatkov, računanje osnovnih količin
2. analitično statistiko: uporaba podatkov pri sklepanju glede zakonitosti danega področja.

Populacija je množica elementov, pri katerih opazujemo ali merimo določeno količino.

Zgleda 1) testiranje oseb:
mn. vseh zaposlenih v državi, merimo npr. starost, višino plače, ...

2) kontrola kvalitete:
serije izdelkov, npr. dnevna proizvodnja žarnic, opazujemo življenjsko dobo.

Mat. pogled: na verj. prostoru $(\Omega, \mathcal{F})$ imamo sl. spremenljivko $X: \Omega \to \mathbb{R}$

Praviloma ne moremo izmeriti cele populacije, pač pa meritve opravimo na rel. majhnem delu populacije, na <u>vzorcu</u>. Le ta mora biti <u>reprezentativen</u>, tj. izbran nepristransko in dovolj velik.

Mat. pogled: <u>Vzorec</u> vel. n je sl. vektor $(X_1, X_2, .., X_n)$, kjer so $X_1, .., X_n$ neodvisne sl. sprem. in porazdeljen tako kot X. Vrednost tega sl. vektorja pri enem naboru n meritev je <u>realizacija vzorca</u> $(x_1, x_2, .. x_n)$, to so konkretni podatki.

Pri opisni statistiki predstavimo in obdelamo te podatke. Radi bi ocenili nelatere lastnosti populacije, kot sta:

1) <u>sredina populacije</u> μ, tj. mat. upanje sl. spr. X

2) <u>povprečni odklon od sredine populacije</u> σ, tj. stand. deviacijo sl. spr. X.

Ocene za μ so:

- <u>Vzorčno povprečje</u>: $\bar{x} = \frac{x_1 + \dots + x_n}{n}$
- <u>Vzorčni modus</u>: najpogostejša vrednost v vzorcu

- <u>vzorčna mediana</u> : srednja vrednost v vzorcu, urejenem po velikosti.

Ocene za σ sta:

- <u>vzorčna disperzija</u> s_0^2 oz. <u>vzorčni odklon</u> s_0 : $s_0^2 = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} (x_k - \overline{x})^2$
- <u>popravljena vzorčna disperzija</u> s^2 :

$$s^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{k=1}^{n} (x_k - \overline{x})^2 = \frac{n}{n-1} \cdot s_0^2$$