Zgled: življenske dobe žarnic v vzorcu:

9·8, 10·2, 10·4, 9·8, 10·0, 10·2, 9·6 (dni)

Predpostavljamo normalno porazd. $N(\mu, \sigma)$.

$\bar{x} = 10{\cdot}0$, $s = \sqrt{\frac{1}{6}\sum_{i=1}^{7}(x_i - \bar{x})^2} = 0{\cdot}283$

Vzemimo $\alpha = 0{\cdot}05$. Pri 6 prost. stopnjah je $t_{\alpha/2} = 2{\cdot}45$

Vzorčno vrednost za A je $\bar{x} - t_{\alpha/2} \cdot \frac{s}{\sqrt{n}} = 9{\cdot}74$,

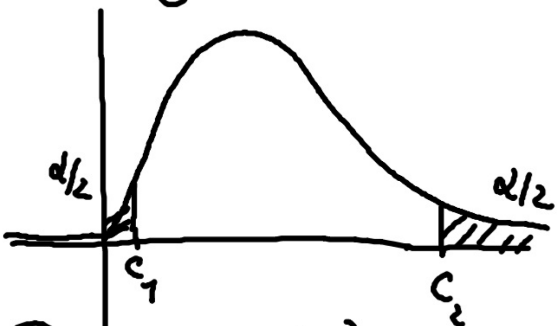
za B pa $\bar{x} + t_{\alpha/2} \cdot \frac{s}{\sqrt{n}} = 10{\cdot}26$. Z verjetnostjo 0·95

je μ na $[9{\cdot}74, 10{\cdot}26]$

3) $X \sim N(\mu, \sigma)$. Ocenjujemo σ^2.

Vzorčna statistika $\chi^2 = \frac{1}{\sigma^2} \sum_{k=1}^{n} (X_k - \bar{X})^2 =$

$= \frac{n-1}{\sigma^2} \cdot S^2$ ima porazd. $\chi^2(n-1)$.



Poiščemo c_1 in c_2, da je

$$P(\chi^2 > c_2) = \frac{\alpha}{2} = P(\chi^2 < c_1).$$

Torej $P(c_1 \leq \chi^2 \leq c_2) = 1 - \alpha$

Pogoj $c_1 \leq \chi^2 \leq c_2$ pomeni: $\frac{1}{c_1} \geq \frac{\sigma^2}{(n-1) \cdot S^2} \geq \frac{1}{c_2} \iff$

$$B := \frac{(n-1) \cdot S^2}{c_1} \geq \sigma^2 \geq \frac{(n-1) \cdot S^2}{c_2} =: A$$

$[A, B]$ je interval zaupanja za σ^2.

Zgled žarnice iz prejšnjega zgleda.

$\alpha = 0.05$, $n = 7$, $(n-1)\cdot s^2 = 0.481$

Za $\chi^2(6)$ je $c_1 = 1.24$, $c_2 = 14.45$.

Zato je $a = \dfrac{0.481}{14.45} = 0.033$, $b = \dfrac{0.481}{1.24} = 0.388$

$$P(0.033 \leq \sigma^2 \leq 0.388) = 0.95 =$$

$$= P(0.182 \leq \sigma \leq 0.623)$$

4) $X \sim Ber(p)$, $X : \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ q & p \end{pmatrix}$, ocenjujemo p.

$\overline{X} = \dfrac{X_1 + \ldots + X_n}{n}$ je nepr. stranska in dosledna cenilka za p.

Po CLI (Laplaceovi formuli) je pri velikih n

$$Z = \frac{S_n - n \cdot p}{\sqrt{npq}} \approx N(0,1) \text{ oz. } S_n \approx N(np, \sqrt{npq})$$

oz. $\bar{X} = \frac{S_n}{n} \approx N\left(p, \sqrt{\frac{p \cdot q}{n}}\right)$

Pri danem $\alpha > 0$ izberemo $z_{\alpha/2} > 0$, da je

$$P\left(|Z| \leq z_{\alpha/2}\right) = 1 - \alpha. \text{ Pogoj } |Z| \leq z_{\alpha/2} \text{ pomeni}$$

$$|S_n - np| \leq z_{\alpha/2} \cdot \sqrt{npq} \iff |\bar{X} - p| \leq z_{\alpha/2} \cdot \sqrt{\frac{p \cdot q}{n}}.$$

Če p na desni strani aproksimiramo z $\bar{X}$, dobimo

$$|\bar{X} - p| \leq z_{\alpha/2} \cdot \sqrt{\frac{\bar{X}(1-\bar{X})}{n}} \text{ oz. } \bar{X} - z_{\alpha/2} \cdot \sqrt{\frac{\bar{X}(1-\bar{X})}{n}} \leq p \leq \bar{X} + \ldots$$

<u>Zgled</u> predsedniške volitve v ZDA leta 2000.
Anketirali so 2207 volivcev:
George Bush 47%, Al Gore 44%,
Ralph Nader 2%

$\alpha = 0{\cdot}05$, $z_{\alpha/2} = 1{\cdot}96$

Interval zaupanja za p_{Bush}: $0{\cdot}47 - 1{\cdot}96 \cdot \sqrt{\frac{0{\cdot}47 \cdot 0{\cdot}53}{2207}} =$
$= 0{\cdot}47 - 0{\cdot}02 = \boxed{0{\cdot}45}$, $0{\cdot}47 + 0{\cdot}02 = \boxed{0{\cdot}49}$

$$p_{Bush} = 0{\cdot}47 \pm 0{\cdot}02$$

$$p_{Gore} = 0{\cdot}44 \pm 1{\cdot}96 \cdot \sqrt{\frac{0{\cdot}44 \cdot 0{\cdot}56}{2207}} = 0{\cdot}44 \pm 0{\cdot}02$$

$$p_{Nader} = 0'02 \pm 1'96 \cdot \sqrt{\frac{0'02 \cdot 0'98}{2207}} = 0'02 \pm 0'006$$

Napaka: $t_{\alpha/2} \cdot \sqrt{\frac{\boxed{\overline{X}(1-\overline{X})}}{n}} \leq 2 \cdot \sqrt{\frac{\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2}}{n}} = \frac{1}{\sqrt{n}}$

$x \in [0,1]$

$$x(1-x) \leq \frac{1}{4} \Leftrightarrow 4x - 4x^2 \leq 1 \Leftrightarrow$$

$$0 \leq 4x^2 - 4x + 1 = (2x-1)^2$$