

Kombinatorika (Kombinatorika 2) – 1. kolokvij

Ljubljana, 4. april 2014

Odgovore dobro utemelji! Čas reševanja je 90 minut. Vse naloge so enakovredne. Na vsak oddan list nujno napišite svoje ime, priimek, vpisno številko ter zaporedno številko lista! Pri reševanju si lahko pomagata z enim A₄ popisanim listom. Rezultati bodo dostopni na <http://ucilnica.fmf.uni-lj.si>.

Veliko uspeha!

1. [25] Naj bo $M = \{m_1, m_2, \dots, m_9\}$ množica takih devetih naravnih števil, izmed katerih nobeno ni deljivo s praštevilom, strogo večjim od 5. Dokaži, da obstajata dva elementa, katerih zmnožek je popolni kvadrat; tj.

$$\exists i, j \in [1, 9] : i \neq j \wedge |\sqrt{m_i \cdot m_j}| \in \mathbb{N}.$$

Ali zaključek velja tudi, če $|M| = 8$?

2. [25] Imamo $(m \times n)$ mrežo nad \mathbb{Z}^2 . Delannoyeva pot od $(0, 0)$ do (m, n) uporablja standardna koraka v smereh $(1, 0)$, $(0, 1)$ ter diagonalni korak $(1, 1)$, tj. $(x, y) \rightarrow (x + 1, y + 1)$. Številu možnih takih poti pravimo Delannoyevo število, ter ga označimo z $D_{m,n}$; npr $D_{2,1} = 5$. Dokaži:

$$D_{m,n} = \sum_k \binom{m}{k} \binom{n+k}{m}.$$

Namig: izrazi število takih poti glede na število diagonalnih korakov.

3. Naj velja $\ell > \frac{n}{2}$.
 - (a) [10] Pokaži, da je število permutacij $\sigma \in S(n)$, ki premorejo cikel dolžine natanko ℓ , enako $\frac{n!}{\ell}$.
 - (b) [10] Izmed vseh permutacij iz $S(n)$; kolikšen je delež tistih, ki premorejo cikel dolžine $> \frac{n}{2}$? Označi ta delež s $t(n)$.
 - (c) [5] Izračunaj $\lim_{n \rightarrow \infty} t(n)$.
4. [25] Dokaži, da je $\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}_q$ polinom stopnje $k \cdot (n - k)$ (glede na spremenljivko q).

"We cannot solve our problems with the same thinking we used when we created them."

(Albert Einstein)