Kombinatorika (Kombinatorika 2) – 2. kolokvij

Ljubljana, 6. junij 2014

Odgovore dobro utemelji! *Čas reševanja je 90 minut. Vse naloge so enakovredne.* ***Na vsak oddan list nujno napišite svoje ime, priimek, vpisno številko ter zaporedno številko lista!*** *Pri reševanju si lahko pomagaš z enim A4 popisanim listom. Podatki o rezultatih ter ogledih kolokvijev bodo objavljeni na* ***http://ucilnica.fmf.uni-lj.si*** *.*

Veliko uspeha!

1. **[25]** Podano imamo rekurzivno zvezo $\alpha_{n+1} = 4\alpha_n - \alpha_{n-1}$, pri začetnih pogojih $\alpha_0 = 0$ ter $\alpha_1 = 1$.
   (a) [10] Izračunaj pripadajočo rodovno funkcijo $F(z) = \sum_{i\geq 0} \alpha_i z^i$.
   (b) [10] Izrazi rodovno funkcijo iz (a) s parcialnimi ulomki.
   (c) [5] Izračunaj α_i v eksplicitni obliki.

2. **[25]** Naj bo m poljubno nenegativno celo število. Za zaporedji $(a_i)_{i\geq 0}$ ter $(b_i)_{i\geq 0}$ je podana zveza
$$a_n = \sum_{k=0}^{n} \binom{m+k}{k} b_{n-k}.$$
   Najdi inverzijo, tj. izrazi b_n s pomočjo različnih členov a_i.

3. **[25]** S pomočjo pravila vključitev in izključitev dokaži, da velja:
$$S(n,k) = \frac{1}{k!} \sum_{j=0}^{k} (-1)^j \binom{k}{j} (k-j)^n .$$

4. **[25]** Graf *lestev* na $2n$ vozliščih označimo z L_n, ter je definiran kot $K_2 \square P_n$. Za enostavnejši zapis uvedimo $t_n := T_{L_n}(x,y)$.
   (a) [15] Dokaži, da velja rekurzivna zveza
$$t_{n+1} = t_n \cdot (x^2 + x + y + 1) - t_{n-1} \cdot x^2 y.$$
   (b) [10] Dokaži, da je število vpetih dreves v lestvi L_n enako $\frac{\sqrt{3}}{6}\left((2+\sqrt{3})^n - (2-\sqrt{3})^n\right)$, $n \geq 0$.

"Combinatorialists and analysts always have different names for everything, in order to keep themselves from interacting."

(J. T. Chayes)