1. BINOMSKI IN MULTINOMSKI KOEFICIENTI

$\binom{n}{k}$ smo že vpeljali. Za formulo potrebujemo:

Def. k-permutacija množice N je k-terica nad N s samimi različnimi elementi.

Primer. 2457 je 4-permutacija množice $[8]$.

TRDITEV. Število k-permutacij n-množice je $n(n-1)\cdots(n-k+1)$.

Dokaz. Prvi elt. n možnost, drugi $n-1, \ldots,$ nato pravilo produkta. □

Oznaka: $n^{\underline{k}} = n(n-1)\cdots(n-k+1)$ ... padajoča potenca

V posebnem: $n^{\underline{n}} = n!$; $n^{\underline{0}} = 1$.

Analogno: $n^{\overline{k}} = n(n+1)\cdots(n+k-1)$ ... naraščajoča potenca

TRDITEV. $\binom{n}{k} = \frac{n^{\underline{k}}}{k!}$, $n, k \geq 0$.

Dokaz. Preštejmo k-permutacij n-množice še kot:

$$\binom{n}{k} \cdot k!.$$

Pravilo dvojnega štetja + prejšnja trditev $\Rightarrow$ $n^{\underline{k}} = \binom{n}{k} k!$ □

Opomba: če je $n < k$, je seveda $\binom{n}{k} = 0$.

Druga oblika:

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

Iz katere dobimo tudi

$$\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}.$$

Opomba: bijektivni dokaz za to formulo: $A \mapsto A^c$.

Polinomska metoda

Pascalovo rekurzijo že poznamo:

$$\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k}, \quad \binom{n}{0} = 1, \quad n, k \geq 0. \qquad (1)$$

Naj bosta sedaj dana polinoma nad $\mathbb{C}$:

$$x^{\underline{k}} = x(x-1)\cdots(x-k+1); \quad x^{\underline{0}} = 1$$

$$x^{\overline{k}} = x(x+1)\cdots(x+k-1), \quad x^{\overline{0}} = 1.$$

Opazujmo polinoma:

$$\frac{x^{\underline{k}}}{k!} \quad \text{in} \quad \frac{(x-1)^{\underline{k-1}}}{(k-1)!} + \frac{(x-1)^{\underline{k}}}{k!}$$

To sta polinoma stopnje k, ki se ujemata v več kot k vrednostih zaradi (1). (Dejansko se ujemata v ∞ zaradi (1).) Torej se (spomni se na interpolacijski polinom!) ujemata za vsak $x \in \mathbb{C}$. Skratka, velja tole:

$$\boxed{\frac{x^{\underline{k}}}{k!} = \frac{(x-1)^{\underline{k-1}}}{(k-1)!} + \frac{(x-1)^{\underline{k}}}{k!}} \quad (k \geq 1).$$

<u>polinomska identiteta</u>. Če sedaj definiramo:

$$\binom{c}{k} = \frac{c^{\underline{k}}}{k!}, \quad c \in \mathbb{C}, \ k \geq 0,$$

potem (1) velja tudi za $\forall c \in \mathbb{C}$. Če nadalje razširimo še na $k < 0$:

$$\binom{c}{k} = \begin{cases} \frac{c^{\underline{k}}}{k!}; & k \geq 0, \\ 0; & k < 0, \end{cases}$$

potem velja:

$$\boxed{\binom{c}{k} = \binom{c-1}{k-1} + \binom{c-1}{k}, \quad c \in \mathbb{C}, \ k \in \mathbb{Z}.}$$

Poglejmo še en primer polinomske metode:

$$(-x)^{\underline{k}} = (-x)(-x-1)\cdots(-x-k+1)$$

$$= (-1)^k x(x+1)\cdots(x+k-1) = (-1)^k x^{\overline{k}}$$

vstavi $x:=-x$ in res, a odveč. Samo pomnoži prvo zvezo z $(-1)^k$!!!

Podobno:

$$(-x)^{\overline{k}} = (-x)(-x+1)\cdots(-x+k-1)$$

$$= (-1)^k x(x-1)\cdots(x-k+1) = (-1)^k x^{\underline{k}}.$$

Torej: $$\boxed{(-x)^{\underline{k}} = (-1)^k x^{\overline{k}} \quad \text{in} \quad (-x)^{\overline{k}} = (-1)^k x^{\underline{k}}} \quad \ldots \quad (1)$$

<u>zakon</u> <u>vzajemnosti</u>

Ker je $x^{\overline{k}} = (x+k-1)^{\underline{k}}$, je torej

$$(-x)^{\underline{k}} = (-1)^k (x+k-1)^{\underline{k}}$$

Ker dva polinoma enaka, odtod za vse $c\in\mathbb{C}$ dobimo:

$$\boxed{\binom{-c}{k} = (-1)^k\binom{c+k-1}{k}} \qquad (1')$$

Podobno, iz druge polinomske identitete v (1):

$$(-1)^k x^{\underline{k}} = (-x+k-1)^{\overline{k}}$$

dobimo: $$\boxed{(-1)^k\binom{c}{k} = \binom{k-c-1}{k}}. \qquad (1'')$$

Ali pa [illegible] v $(1')$ vstavimo "$c=-c$".

1,2

Pascalova matrika $P = \left(\binom{n}{k}\right)$:

tu vse 0

$n \backslash k$	0	1	2	3	4	5	6	7	8
0	1								
1	1	1							
2	1	2	1						
3	1	3	3	1					
4	1	4	6	4	1				
5	1	5	10	10	5	1			
6	1	6	15	20	15	6	1		
7	1	7	21	35	35	21	7	1	
8	1	8	28	56	70	56	28	8	1

Pascalova matrika skriva v sebi številne kombinatorične identitete. Na primer: poglejmo tri narisane meje v matriki. Za njih dobimo.

TRDITEV (i) $\sum_{i=0}^{n}\binom{i}{k} = \binom{n+1}{k+1}$ (k-ti stolpec do n-ti) ZELENO

(ii) $\sum_{i=0}^{k}\binom{m+i}{i} = \binom{m+k+1}{k}$. (diagonala od m do k) RDEČE

(iii) $\sum_{k=0}^{m}(-1)^k\binom{n}{k} = (-1)^m\binom{n-1}{m}$. MODRO

Dokaz. (i) $(k+1)$-podmnožice od $[n+1]$ lahko razbijemo glede na njihov največji elt. $i+1$, $1 \le i+1 \le n+1 \Rightarrow 0 \le i \le n$. Pravilo vsote zaključi dokaz.

(ii) $$\sum_{i=0}^{k}\binom{m+i}{i} = \sum_{i=0}^{k}\binom{m+i}{m} = \binom{m}{m}+\binom{m+1}{m}+\dots+\binom{m+k}{m}$$

$\binom{n}{k}=\binom{n}{n-k}$

$$= \sum_{i=0}^{m+k}\binom{i}{m} \overset{(i)}{=} \binom{m+k+1}{m+1} = \binom{m+k+1}{k}.$$

(iii) $$\sum_{k=0}^{m}(-1)^k\binom{n}{k} = \sum_{k=0}^{m}\binom{k-n-1}{k} = \sum_{i=0}^{m}\binom{(-n-1)+i}{i}$$

$$\overset{(ii)}{=} \binom{(-n-1)+m+1}{m} = \binom{m-n}{m}$$

$$\overset{(1')}{=} (-1)^m\binom{n-1}{m} \quad \square$$

posledica zakona vzajemnosti

pokorrimo na vrstna primera: $n = n-1$, $m = m$.

Binomski izrek

$$\boxed{(x+y)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k y^{n-k}.}$$

Posledice:

- $$(x+1)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k \qquad (y=1)$$
- $$(x-1)^n = \sum_{k=0}^{n} (-1)^{n-k} \binom{n}{k} x^k \qquad (y=-1)$$
- $$x=1 \Rightarrow 2^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}$$

$$\sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n}{k} = \delta_{n,0}. \qquad \delta_{i,j} = \begin{cases} 1; & i=j, \\ 0; & i \neq j. \end{cases}$$

IZREK (Vandermondeova identiteta)

$$\binom{x+y}{n} = \sum_{k=0}^{n} \binom{x}{k}\binom{y}{n-k} \qquad (n \in \mathbb{N}_0).$$

Dokaz. Naj bosta R, S disjunktni množici, $|R|=r$, $|S|=s$. Tedaj je # n-podmnožic od $R \cup S$ enako $\binom{r+s}{n}$. Po drugi strani je vsaka taka podmnožica unija k-podmnožice od R in $(n-k)$-podmnožice od S. Če torej razbijemo n-podmnožice A od $R \cup S$ glede na $|A \cap R| = k$, dobimo:

$$\binom{r+s}{n} = \sum_{k=0}^{n} \binom{r}{k} \cdot \binom{s}{n-k}.$$

Sedaj zopet uporabimo polinomsko metodo. □

Multimnožice

– multimnožica, primer: $M = \{1,2,2,2,3,4,4\}$ je multimnožica nad $[4]$.

TRDITEV. Število k-multimnožic n-množice je

$$\binom{n+k-1}{k} = \frac{n^{\overline{k}}}{k!}.$$

Dokaz. $X = \{x_1, \dots, x_n\}$. $\quad x_1 \dots x_1 \mid x_2 \dots x_2 \mid \dots \mid x_n \dots x_n \to k$ x-ov, $n-1$ $\mid$ $\Rightarrow \dots$ $\square$

IZREK (Multinomski izrek)

$$(x_1 + \dots + x_m)^n = \sum_{(k_1, \dots, k_m)} \binom{n}{k_1 \dots k_m} x_1^{k_1} \cdots x_m^{k_m},$$

kjer je

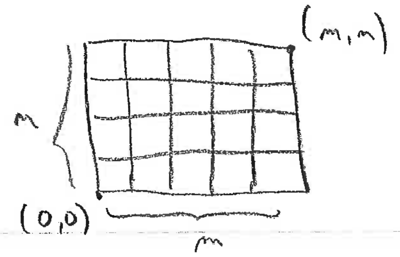
$$\binom{n}{k_1 \dots k_m} = \frac{n!}{k_1! \cdots k_m!}, \quad \sum_{i=1}^{m} k_i = n \quad \text{multinomski koeficient.}$$

$\square$

$\binom{n}{k_1 \dots k_m}$ … # n-besed nad $\{x_1, \dots, x_m\}$, kjer x_i nastopa k_i-krat.

Mrežne poti

$m \times n$ celoštevilska mreža:



Na koliko načinov lahko pridemo iz $(0,0)$ do (m,n) s koraki $\to$ in $\uparrow$?

R1. $L(m,n)$ iskano število. Tedaj je $L(m,0) = 1$, $L(0,n) = 1$ in

$$L(m,n) = L(m-1,n) + L(m,n-1).$$

To je natanko Pascalova rekurzija za $\binom{m+n}{m}$, torej je $\underline{L(m,n) = \binom{m+n}{m}}$.

R2. Vsako pot lahko zakodiramo takole: E … East, N … North.

ENN…..

$m+n$ simbolov, natanko m krat simbol E.