# 5. FORMALNE POTENČNE VRSTE

To je ena najpomembnejših idej v kombinatoriki. Omogoča enostavne dokaze kombinatoričnih identitet in rekurzivnih relacij. Ideja:

$$f : \mathbb{N}_0 \to \mathbb{C} \quad \longmapsto \quad F(z) = \sum_{n \geq 0} f(n) z^n \quad \ldots \text{ rodovna funkcija za } f.$$

poljubna preštevalna funkcija

- Rodovna funkcija je torej formalna potenčna vrsta: "formalna" zato, ker $F(z)$ gledamo kot algebraični objekt (in ne analitični).
- Formalna potenčna vrsta ali kratko formalna vrsta.
- Enakost: formalni vrsti $F(z)$ in $G(z)$ sta enaki, če se ujemata v vseh koeficientih.
- $A(z) = \sum_{n \geq 0} a_n z^n$, tedaj bomo pisali: $a_n = [z^n]A(z)$.

  $a_0 = A(0)$ ... konstantni koeficient

$\mathbb{C}[[z]]$ ... množica vseh formalnih vrst nad $\mathbb{C}$.

- Dogovor: $a_k = 0$ za $k < 0$.

Seštevanje in množenje:

seštevanje: $\sum a_n z^n + \sum b_n z^n = \sum (a_n + b_n) z^n$

skalarni produkt: $c \sum a_n z^n = \sum (c a_n) z^n$

S tema operacijama $\mathbb{C}[[z]]$ postane vektorski prostor. 10

množenje: $\sum a_n z^n \cdot \sum b_n z^n = \sum_n \left( \sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k} \right) z^n$ ... konvolucija $A(z)$ in $B(z)$

S seštevanjem in množenjem je $\mathbb{C}[[z]]$ komutativen kolobar brez deliteljev niča (torej $A(z) \cdot B(z) = 0 \Rightarrow A(z) = 0$ ali $B(z) = 0$).

**TRDITEV.** $A(z)=\sum_{n\geq 0} a_n z^n$ ima inverz natanko tedaj, ko je $a_0 \neq 0$.

**Dokaz.** ($\Rightarrow$) Naj bo $A(z)\cdot B(z)=1$. Tedaj je $a_0 b_0 = 1 \Rightarrow a_0 \neq 0$.

($\Leftarrow$) Naj bo $a_0 \neq 0$. $B(z)$ določimo postopno: ker mora veljati $a_0 b_0 = 1$, je $b_0 = a_0^{-1}$.

Recimo, da so $b_0, \ldots, b_{n-1}$ že enolično določeni. Potem je

$$[z^n]A(z)\cdot B(z) = 0 = \sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k} = a_0 b_n + \sum_{k=1}^{n} a_k b_{n-k} \Rightarrow b_n = -a_0^{-1} \sum_{k=1}^{n} a_k b_{n-k}$$

□

**Primeri.** (i) Ker je $(1+z+z^2+\ldots)(1-z)=1$, lahko pišemo:

$$\sum_{n\geq 0} z^n = \frac{1}{1-z}$$

(ii) $A(z)=\sum_{n\geq 0} a_n z^n$. Tedaj je

$$\frac{A(z)}{1-z} = \left(\sum a_n z^n\right)\cdot \sum z^n = \sum_n \left(\sum_{k=0}^{n} a_k\right) z^n.$$

Torej $[z^n]\, A(z)(1-z)^{-1}$ je vsota koeficientov od $A(z)$ do $z^n$. Poseben primer:

$$\left(\frac{1}{1-z}\right)^2 = \left(\frac{1}{1-z}\right)\left(\frac{1}{1-z}\right) = \frac{\sum z^n}{1-z} = \sum_n (n+1) z^n$$

(iii)

$$z^m \cdot \sum_{n\geq 0} a_n z^n = \sum_{n\geq 0} a_n z^{n+m} = \sum_{n\geq 0} a_{n-m} z^n \qquad (a_k = 0 \text{ za } k<0!)$$

Torej množenje z $z^m$ je zamik indeksa za $-m$. Na primer:

$$\frac{z}{(1-z)^2} = \sum_n n z^n.$$

**Komponiranje formalnih vrst**

Za $A(z)=\sum a_n z^n$ in $B(z)=\sum b_n z^n$ postavimo

$$A(B(z)) = \sum_{n\geq 0} a_n (B(z))^n.$$

Razpišimo:

$$A(B(z)) = a_0 + a_1(b_0+b_1z+b_2z^2+\ldots) + a_2(b_0+b_1z+b_2z^2+\ldots)^2 + \ldots$$

Kdaj je komponiranje dobro definirano?

<u>TRDITEV.</u> $A(B(z))$ je dobro definirana formalna vrsta, če je $A(z)$ polinom ali $B(0)=0$.

<u>Dokaz.</u> Trditev je očitna v primeru, ko je $A(z)$ polinom.
Naj bo sedaj $B(0)=0$, z drugimi besedami, $b_0=0$. Tedaj je

$$[z^n]\, A(B(z)) = [z^n] \sum_{k=0}^{n} a_k (b_1 z + b_2 z^2 + \dots)^k$$

in to je dobro definirano. □

<u>Opomba</u>: problem, če je $b_0 \neq 0$, je, da $\infty$-krat dobiš koeficient pri $x^n$:

$$a_i (b_0 + b_1 z + \dots)^i = a_i (b_0 + \dots)(b_0 + \dots) \underbrace{\dots (b_0 + \dots)}_{+\, n \times \text{ potence od } z \dots}$$

<u>Def.</u> Če velja $A(B(z)) = B(A(z)) = z$, tedaj je $B(z)$ <u>kompozicijski inverz</u> od $A(z)$, oznaka: $A^{\langle -1 \rangle}(z)$. Pri tem je $z$ <u>kompozicijska enota</u>.

<u>TRDITEV.</u> Naj bo $A(0)=0$. Potem $A^{\langle -1 \rangle}(z)$, za katerega je $A^{\langle -1 \rangle}(0)=0$, obstaja natanko tedaj, ko je $a_1 \neq 0$.

<u>Dokaz</u>: VAJE.

Lastnosti komponiranja (veljajo, če so le formalne vrste dobro definirane):

- $C(z) = A(z) + B(z) \Rightarrow C(D(z)) = A(D(z)) + B(D(z))$ ($D(z)$ poljubna formalna vrsta)
- $C(z) = A(z) \cdot B(z) \Rightarrow C(D(z)) = A(D(z)) \cdot B(D(z))$

Če ima $A(z)$ kompozicijski inverz, tedaj je

- $A(B(z)) = A(C(z)) \Rightarrow B(z) = C(z)$
- $A(D(z))^{-1} = A^{-1}(D(z))$

Tule je seznam (najbolj) pogostih formalnih vrst:

**TRDITEV.** (i) $\sum_{n\geq 0} z^n = \frac{1}{1-z}$,

(ii) $\sum_{n\geq 0} (-1)^n z^n = \frac{1}{1+z}$,

(iii) $\sum_{n\geq 0} z^{2n} = \frac{1}{1-z^2}$,

(iv) $\sum_{n\geq 0} \binom{m}{n} z^n = (1+z)^m \qquad (m\in\mathbb{Z})$

(v) $\sum_{n\geq 0} \binom{m+n-1}{n} z^n = \frac{1}{(1-z)^m} \qquad (m\in\mathbb{Z})$

(vi) $\sum_{n\geq 0} \binom{m+n}{n} z^n = \frac{1}{(1-z)^{m+1}} \qquad (m\in\mathbb{Z})$

(vii) $\sum_{n\geq 0} \binom{n}{m} z^n = \frac{z^m}{(1-z)^{m+1}} \qquad (m\in\mathbb{N}_0)$

Dokaz. (i): Od prej. (ii): postavi $z=-z$ v (i). (iii): postavi $z=z^2$ v (i).

(iv): Za $m\geq 0$ je to binomski izrek. Naj bo sedaj $m<0$. Ker je $(1+z)^m$ inverz od $(1+z)^{-m}$:

$$(1+z)^m(1+z)^{-m}=1$$

in je $(1+z)^{-m} = \sum_{n\geq 0}\binom{-m}{n} z^n$ (saj je $-m>0$), moramo dokazati,

da je $P = \sum_{n\geq 0}\binom{m}{n}z^n \cdot \sum_{n\geq 0}\binom{-m}{n} z^n = 1$.

Vandermondeova identiteta:
$$\binom{x+y}{n} = \sum_{k=0}^{n}\binom{x}{k}\binom{y}{n-k}.$$

To pa takoj sledi iz Vandermondeove identitete:

$$P = \sum_{n\geq 0}\left(\sum_{k=0}^{n}\binom{m}{k}\cdot\binom{-m}{n-k}\right)z^n = \sum_{n\geq 0}\underbrace{\binom{0}{n}}_{\delta_{0,n}} z^n = 1.$$

Zakon vzajemnosti:
$$(-1)^k\binom{-c}{k} = \binom{k+c-1}{k}$$

(v): V (iv) pišimo $m=-m$ in $z=-z$:

$$\sum_{n\geq 0}\binom{-m}{n}(-1)^n z^n = \sum_{n\geq 0}\binom{m+n-1}{n} z^n \overset{(iv)}{=} \frac{1}{(1-z)^m}$$

(vi): enako kot (v), le da pišemo $m=-(m+1)$.

(vii): $$\frac{z^m}{(1-z)^{m+1}} \overset{(vi)}{=} z^m \sum_{n\geq 0}\binom{m+n}{n} z^n = \sum_{n\geq 0}\binom{m+(n-m)}{n-m} z^n = \sum_{n\geq 0}\overbrace{\binom{n}{n-m}}^{\binom{n}{m}} z^n \qquad \square$$

točka (iii) iz 5/2: zamik indeksa $n \to n-m$

F(z) tu pišemo namesto A(z), da izgleda bolj kot oznaka za funkcijo

## Odvajanje formalnih vrst

Naj bo $F(z)=\sum_{n\ge0} a_n z^n$, tedaj je formalni odvod:

$$F'(z)=\sum_{n\ge1} n a_n z^{n-1} = \sum_{n\ge0}(n+1)a_{n+1}z^n.$$

Veljajo vse lastnosti, ki jih pričakujemo:

- $(F+G)'=F'+G'$ • $(FG)'=F'G+FG'$
- $(F^{-1})'=-\frac{F'}{F^2}$ • $F(G(z))'=F'(G(z))\cdot G'(z)$.
- Če je $F(0)=1$, tedaj $(\log F(z))'=\frac{F'(z)}{F(z)}$.

Inverzna operacija je formalni nedoločeni integral:

$$\int\sum_{n\ge0} a_n z^n = \sum_{n\ge0} a_n \frac{z^{n+1}}{n+1} + \text{konstanta}$$

Primer: $F(z)=\sum_{n\ge0}\binom{2n}{n}z^n = ?$ $\qquad a_n:=\binom{2n}{n}$

$$a_n=\binom{2n}{n}=\frac{2n(2n-1)(2n-2)!}{n\cdot(n-1)!\,n\cdot(n-1)!}=\frac{2n(2n-1)}{n^2}\binom{2(n-1)}{n-1}=\frac{2n(2n-1)}{n^2}a_{n-1}, \text{ torej}$$

$$n\cdot a_n = 4n a_{n-1}-2a_{n-1}.$$

Odtod dobimo:

$$F'(z)=\sum_{n\ge0}(n+1)a_{n+1}z^n = 4\sum_{n\ge0}(n+1)a_n z^n - 2\sum_{n\ge0}a_n z^n$$

$$=4\sum_{n\ge0}n a_n z^n + 2\sum_{n\ge0}a_n z^n$$

$$=4z\sum_{n\ge1}n a_n z^{n-1}+2F(z) = 4zF'(z)+2F(z)$$

Dobimo: $F'(z)=\frac{2F(z)}{(1-4z)}$ oziroma $\frac{F'(z)}{F(z)}=\frac{2}{1-4z}$.

Zato je:

$$\left(\log F(z)\right)' = \frac{F'(z)}{F(z)} = \frac{2}{1-4z} = -\frac{1}{2}\left(\log(1-4z)\right)'$$

Sedaj formalno nedoločeno integriramo in ker se konstanti pokrajšata, dobimo:

$$\log F(z) = -\frac{1}{2}\log(1-4z) + c$$

Upoštevamo, da velja $m \log A(z) = \log\left(A(z)^m\right)$ (za $A(0)=1$) (brez dokaza) in dobimo:

$$F(z) = e^c \frac{1}{\sqrt{1-4z}}$$ in ker je $F(z)=1$, je $e^c = 1$.

Skratka, dokazali smo, da je

$$\boxed{F(z) = \sum_{n\geq 0}\binom{2n}{n} z^n = \frac{1}{\sqrt{1-4z}}.}$$

---

## Drugi tipi formalnih vrst:

$(a_n)_{n\geq 0} \longmapsto \sum a_n z^n$ ... običajna formalna vrsta

$\longmapsto \hat{A}(z) = \sum_{n\geq 0} a_n \frac{z^n}{n!}$ ... eksponentna formalna vrsta

Splošneje: naj bo $q_1, q_2, q_3, \ldots$ zaporedje neničelnih kompleksnih števil. Postavimo

$$Q_n = q_1 \cdot q_2 \cdots q_n, \quad Q_0 = 1.$$

Če je $f: \mathbb{N}_0 \to \mathbb{C}$, tedaj je Q-vrsta

$$F(z) = \sum_{n\geq 0} f(n) \frac{z^n}{Q_n}.$$

Za $q \equiv 1$ dobimo običajno potenčno vrsto, za $q_n = n$ pa eksponentno potenčno vrsto.

12

Primer. (za uporabo eksponentne rodovne funkcije).

Za $(a_n)_{n\ge 0}$ in $(b_n)_{n\ge 0}$ je

$$\hat{A}(z)\cdot\hat{B}(z) = \left(\sum_{n\ge 0} a_n \frac{z^n}{n!}\right)\cdot\left(\sum_{n\ge 0} b_n \frac{z^n}{n!}\right) = \sum_{n\ge 0}\left(\sum_{k=0}^{n} \frac{a_k}{k!}\frac{b_{n-k}}{(n-k)!}\right) z^n \cdot \frac{n!}{n!}$$

$$= \sum_{n\ge 0}\left(\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k} a_k b_{n-k}\right)\frac{z^n}{n!}$$

V posebnem, ker je $e^z = \sum \frac{z^n}{n!}$

$$\hat{A}(z)\cdot e^z = \sum_{n\ge 0}\left(\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k} a_k\right)\frac{z^n}{n!}. \qquad (1)$$

Naj bo sedaj $(D_n)_{n\ge 0}$ zaporedje števila deranžmajev. Vse permutacije lahko razdelimo glede na število negibnih točk, zato je:

$$n! = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k} D_{n-k} = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{n-k} D_{n-k} = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k} D_k .$$

izberemo $k$ negibnih točk — ostali elt. tvorijo deranžma

Tedaj iz (1) preberemo:

$$\hat{D}(z)e^z = \sum_{n\ge 0}\left(\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k} D_k\right)\frac{z^n}{n!} = \sum_{n\ge 0} n!\,\frac{z^n}{n!} = \frac{1}{1-z} \Rightarrow$$

$$\sum_{n\ge 0} D_n \frac{z^n}{n!} = \hat{D}(z) = \frac{e^{-z}}{1-z} = \left(1-\frac{z}{1!}+\frac{z^2}{2!}-\frac{z^3}{3!}+\dots\right)\left(1+z+z^2+\dots\right)$$

$$\Rightarrow D_n = n!\left(1-\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}-\dots\frac{1}{n!}\right)$$

recall: $[z^n]\frac{A(z)}{1-z}$ = vsota koeficientov od $A(z)$ do $z^n$.

---

Zaključna opomba: Potenčne vrste (rodovne funkcije) uporabljamo tudi v verjetnosti.

Če je $X:\Omega\to\mathbb{N}_0$ slučajna spremenljivka in

$p_n = P(X=n)$, tedaj je

$P_X(z) = \sum_{n\ge 0} p_n z^n$ verjetnostna potenčna vrsta (oz. verjetnostna rodovna funkcija)

Seveda je $p_n \ge 0$ in $P_X(1)=1$. (Sedaj gledamo $P_X(z)$ kot funkcijo!) Nadalje:

$E(X) = P_X'(1)$ ... upanje in

$Var(X) = P_X''(1) + P_X'(1) - (P_X'(1))^2$ ... varianca $\left(Var(X) = E(X^2) - E(X)^2\right)$