4. GAUSSOVI KOEFICIENTI

Spomnimo se: $x^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}(x-1)^k$ (pišeš $x^n = ((x-1)+1)^n$). (1)

$\binom{n}{k}$ so torej povezovalni koeficienti med polinomskima zaporedjema $(x^n)_{n\geq 0}$ in $((x-1)^n)_{n\geq 0}$.

Gaussovi koeficienti so hkrati posplošitev tega.

Def. Naj bo $q \in \mathbb{C}$ ali, splošneje, spremenljivka ("nedeterminanta"). Tedaj so

$$g_n(x) = (x-1)(x-q)\cdot\ldots\cdot(x-q^{n-1}) \quad (n \geq 1)$$

$$g_0(x) = 1$$

Gaussovi polinomi.

Opombi:

- q je fiksen in ga ni v oznaki $g_n(x)$ za lepši zapis.
- $q = 1$: $g_n(x) = (x-1)^n$ (2)

Def. Gaussovi koeficienti, ${n \brack k}_q$ so povezovalni koeficienti za polinomski zaporedji (x^n) in $(g_n(x))$. Torej:

$$x^n = \sum_{k=0}^{n} {n \brack k}_q g_k(x). \qquad (3)$$

Opomba: $q = 1$: iz (1) & (2) potem takoj sledi, da je ${n \brack k}_1 = \binom{n}{k}$.

TRDITEV. ${n \brack 0}_q = 1$ in ${n \brack k} = {n-1 \brack k-1}_q + q^k {n-1 \brack k}_q$ za $n \geq k \geq 1$.

Dokaz. V (3) postavimo $x = 1 \Rightarrow 1 = {n \brack 0}_q \cdot \underbrace{g_0(1)}_{1} \Rightarrow {n \brack 0}_q = 1$.

Za rekurzijo najprej: $g_k(x) = (x-1)\ldots(x-q^{k-2})(x-q^{k-1}) = g_{k-1}(x)(x-q^{k-1})$. (4)

zato je

$$x^n = x\,x^{n-1} = x\sum_k {n-1 \brack k}_q g_k(x) = x \cdot \sum_k {n-1 \brack k-1}_q g_{k-1}(x) \overset{(4)}{=}$$

$$= \sum_k {n-1 \brack k-1}_q \left(g_k(x) + q^{k-1} g_{k-1}(x)\right) = \sum_k {n-1 \brack k-1}_q g_k(x) + \sum_k {n-1 \brack k}_q q^k g_k(x)$$

$$= \sum_k \left({n-1 \brack k-1}_q + q^k {n-1 \brack k}\right) g_k(x). \qquad \square$$

Za izračun Gaussovih koeficientov vpeljimo še:

- $[n]_q = \dfrac{1-q^n}{1-q} = 1+q+q^2+\dots+q^{n-1}$ ... q-celo število n

(Opomba: za $q=1$ je $[n]_1 = n$)

- $[n]_q! = [n]_q \cdot [n-1]_q \cdot \ldots \cdot [1]_q = \dfrac{(1-q^n)(1-q^{n-1})\cdot\ldots\cdot(1-q)}{(1-q)^n}$

- $[0]_q! \overset{\text{def.}}{=} 1$

(Opomba: $[n]_1! = n!$)

IZREK. $\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}_q = \dfrac{[n]_q!}{[k]_q![n-k]_q!} \quad (n \geq k \geq 0).$

Dokaz. $n=0$: $\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}_q = 1 = \dfrac{[0]_q!}{[0]_q![0]_q!} = 1$ ✓

$n-1 \to n$: velja za $k=0$ ✓ ker je $[n]_q! = [n]_q[n-1]_q! = \dfrac{1-q^n}{1-q}[n-1]_q!$:

$$\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}_q \overset{\text{TRDITEV}}{\underset{4/1}{=}} \begin{bmatrix} n-1 \\ k-1 \end{bmatrix}_q + q^k \begin{bmatrix} n-1 \\ k \end{bmatrix}_q$$

$$= \frac{[n-1]_q!}{[k-1]_q![n-k]_q!} + q^k \frac{[n-1]_q!}{[k]_q![n-k-1]_q!}$$

$$= \frac{[n-1]_q!}{[k]_q![n-k]_q!}\left(\frac{1-q^k}{1-q} + q^k\frac{1-q^{n-k}}{1-q}\right)$$

$$[n-k]_q! = \frac{1-q^{n-k}}{q-1}[n-k-1]_q!$$

$$\frac{1}{[n-k]_q!}\cdot\frac{1-q^{n-k}}{q-1} = \frac{1}{[n-k-1]_q!}$$

$$= \frac{[n-1]_q!}{[k]_q![n-k]_q!}\;\frac{1-q^n}{1-q} = \frac{[n]_q!}{[k]_q![n-k]_q!}$$

□

Opombe:

(i) Izrek $\Rightarrow$ $\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}_q = \begin{bmatrix} n \\ n-k \end{bmatrix}_q$

(ii) $\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}_q = \dfrac{[n]_q[n-1]_q\cdot\ldots\cdot[n-k+1]_q}{[k]_q!}$: analogija z $\binom{n}{k} = \dfrac{n^{\underline{k}}}{k!}$

(iii) Opomba (ii) pravi, da je smiselno definirati:

$$x_q^{\underline{n}} = x(x-[1]_q)\cdots(x-[n-1]_q) \quad \dots \text{ padajoča q-potenca}$$

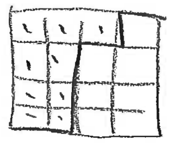
$$x_q^{\overline{n}} = x(x+[1]_q)\cdots(x+[n-1]_q) \dots \quad \text{naraščajoča q-potenca}$$

$S(n,k;q)$ ... q-Stirlingova števila so povezovalni koeficienti med polinomskima zaporedjema (x^n) in $(x_q^{\underline{n}})$.

Gaussovi koeficienti in mrežne poti

Spomnimo (str. 3/3): $p(;\le n;\le m) = \binom{m+n}{m}$.

Dokaz je bil z bijekcijo z mrežnimi potmi in pikami nad potjo:



Vse poti lahko klasificiramo glede na število pik: naj bo

$$a_i = p(i;\le n;\le m) \qquad 0 \le i \le m+n.$$

Def. $A_{m,n}(q) = \sum_{i=0}^{mn} a_i q^i$.

Opombi: • Če je $n = \lambda_1+\dots+\lambda_k$, kjer $\lambda = \lambda_1\dots\lambda_k$, naj bo $|\lambda| = n$. Tedaj je

$$A_{m,n}(q) = \sum_{\lambda\in Par(;\le n;\le m)} q^{|\lambda|}.$$

• $A_{m,n}(1) = \sum_{i=0}^{mn} a_i = \binom{m+n}{m}$.

IZREK. $A_{m,n}(q) = \begin{bmatrix} m+n \\ m\end{bmatrix}_q$.

Dokaz. ideja: pokazali bomo, da oba izraza zadoščata istim začetnim pogojem in isti rekurziji.

$m=0$ ali $n=0$: $A_{m,0}(q) = A_{0,n}(q) = 1$ zaradi prazne particije.

vemo tudi že, da je $\left[{0+n \atop 0}\right]_q = \left[{m+0 \atop m}\right]_q = 1.$

$m,n \geq 1$: Za $\left[{m+n \atop m}\right]_q$ vemo (Trditev 9/1):

$$\left[{m+n \atop m}\right]_q = \left[{m+n-1 \atop m-1}\right]_q + q^m \left[{m+n-1 \atop m}\right]. \qquad (1)$$

$A_{m,n}(q)$: $$A_{m,n}(q) = \sum_{\substack{\lambda \in Par(;\leq n;\leq m) \\ \lambda = \lambda_1 \lambda_2 \dots}} q^{|\lambda|}$$

$$= \sum_{\lambda_1 < m} q^{|\lambda|} + \sum_{\lambda_1 = m} q^{|\lambda|}$$

$$= \sum_{\lambda \in Par(;\leq n;\leq m-1)} q^{|\lambda|} + q^m \sum_{\lambda \in Par(;\leq n-1;\leq m)} q^{|\lambda|}$$

$$= A_{m-1,n}(q) + q^m A_{m,n-1}(q). \qquad (2)$$

(1) in (2) sedaj določata isto rekurzijo. □

Naj bo q potenca praštevila in naj bo $\mathbb{F}_q = GF(q)$ končni obseg z q elementi. Naj bo nadalje $\mathbb{F}_q^n$ n-dimenzionalni vektorski prostor nad $\mathbb{F}_q$ in vseh n-teric $(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$, kjer je $\alpha_i \in \mathbb{F}_q$.

<u>IZREK.</u> Število k-dimenzionalnih podprostorov od $\mathbb{F}_q^n$ je $\left[{n \atop k}\right]_q$.

Dokaz. Preštejmo urejene k-terice $(v_1,\dots,v_k)$ linearno neodvisnih vektorjev iz $\mathbb{F}_q^n$ na dva načina.

(i) $(v_1, v_2, \dots, v_k)$

$v_1 \dots q^n-1$ možnosti: vsi vektorji razen ničelnega

$v_2 \dots q^n-q$ možnosti: vsi vektorji razen linearnih kombinacij od v_1 (teh je q)

$v_3 \dots q^n-q^2$ možnosti: vse razen $\alpha v_1+\beta v_2$, $\alpha,\beta \in \mathbb{F}_q$.

$\vdots$

$$\# = (q^n-1)(q^n-q)\dots(q^n-q^{k-1}). \qquad (1)$$

(ii) $(v_1, v_2, \dots, v_k)$ izberimo tako, da najprej izberemo k-dimenzionalen podprostor, teh je iskano število, označimo ga x. Potem za

$v_1 \dots q^k-1$ možnosti: vsak neničelni vektor

$v_2 \dots q^k-q$ možnosti: vsak, ki ni linearna kombinacija od v_1

$\vdots$

$$\# = x\cdot(q^k-1)(q^k-q)\dots(q^k-q^{k-1}). \qquad (2)$$

$$(1)\,\&\,(2) \Rightarrow x = \frac{(q^n-1)(q^n-q)\dots(q^n-q^{k-1})}{(q^k-1)(q^k-q)\dots(q^k-q^{k-1})} =$$

$$= \frac{(1-q^n)\cancel{q}(1-q^{n-1})\dots\cancel{q^{k-1}}(1-q^{n-k+1})}{(1-q^k)\cancel{q}(1-q^{k-1})\dots\cancel{q^{k-1}}(1-q)} = \frac{(1-q^n)(1-q^{n-1})\dots(1-q^{n-k+1})}{(1-q)(1-q)\quad(1-q)}\cdot\frac{(1-q)\dots(1-q)}{(1-q^k)\dots(1-q)}$$

$$= \frac{[n]_q[n-1]_q\dots[n-k+1]_q}{[k]_q!} = \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}_q. \quad \square$$

Opomba: Dokaz je paralelen dokazu, da je $\binom{n}{k} = \frac{n^{\underline{k}}}{k!}$. Res: preštejmo urejene k-terice iz n-množice:

(i) $(x_1,\dots,x_k)\dots n^{\underline{k}}$ možnosti.

(ii) izberemo k-podmnožico na x načinov. Potem je k-teric $x\cdot k!$ $\Rightarrow x\cdot k! = n^{\underline{k}}$.