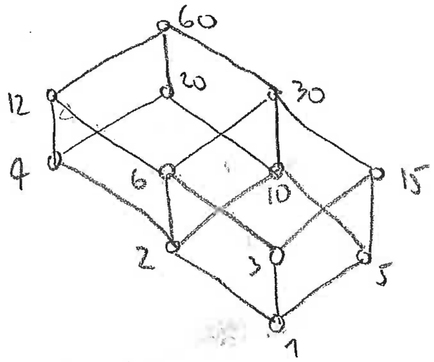
9. MÖBIUSOVA INVERZIJA

- $(P, \le)$ delna urejenost.
- <u>Interval</u>: $a, b \in P$, potem je $[a,b] = \{x \in P : a \le x \le b\}$ ... interval med a in b
- b <u>pokriva</u> a, če je $[a,b] = \{a,b\}$.
- Zanimale nas bodo <u>lokalno</u> <u>končne</u> delne urejenosti, tj. urejenosti, za katere je vsak interval $[a,b]$ končen.

<u>Primeri</u>: $(\mathbb{N}, \le)$, $(\mathbb{Z}, \le)$, $D = (\mathbb{N}, |)$.

S množica, $B(S)$ vse končne podmnožice od S urejene z $\subseteq$.

- Hassejev diagram, primer, $[1, 60]$ v D:



<u>Def.</u> Naj bo $(P, \le)$ lokalno končna delna urejenost. Tedaj je

$$\mathbb{A}(P) = \{f : P \times P \to \mathbb{C} : x \not\le y \Rightarrow f(x,y) = 0\}$$

<u>incidenčna</u> <u>algebra</u> od P.

namesto $\mathbb{C}$ bi lahko bil poljuben obseg s karakteristiko 0.

Operacije v $\mathbb{A}(P)$:

- običajno seštevanje funkcij
- običajno množenje s skalarjem

} vektorski prostor

- <u>Konvolucijski produkt</u> $f * g : P \times P \to \mathbb{C}$:

$$(f*g)(a,b) = \begin{cases} \sum\limits_{a \le x \le b} f(a,x) \cdot g(x,b), & a \le b \\ 0, & a \not\le b. \end{cases}$$

Opomba: Ker je P lokalno končna, je $*$ dobro definirana operacija.

Lastnosti konvolucijskega produkta:

- asociativnost: $(f*(g*h))(a,b) = \sum_{a\le x\le b} f(a,x)\cdot (g*h)(x,b)$

$$= \sum_{a\le x\le b} f(a,x)\cdot \sum_{x\le y\le b} g(x,y)\cdot h(y,b) = \sum_{a\le x\le b}\ \sum_{x\le y\le b} f(a,x)\cdot g(x,y)\cdot h(y,b)$$

$$((f*g)*h)(a,b) = \sum_{a\le y\le b} (f*g)(a,y)\cdot h(y,b)$$

$$= \sum_{a\le y\le b}\Big(\sum_{a\le x\le y} f(a,x)\cdot g(x,y)\Big)\cdot h(y,b) = \sum_{a\le x\le y\le b} f(a,x)g(x,y)h(y,b)$$

- Kroneckerjeva δ funkcija $\delta(x,y) = \begin{cases} 1; & x=y \\ 0; & x\neq y \end{cases}$

je dvostranska identiteta:

$$(f*\delta)(a,b) = \sum_{a\le x\le b} f(a,x)\cdot \delta(x,b) = f(a,b)\cdot 1 = f(a,b)$$

$$(\delta*f)(a,b) = \sum_{a\le x\le b} \delta(a,x)\cdot f(x,b) = \delta(a,a)\cdot f(a,b) = f(a,b).$$

<u>TRDITEV.</u> $f\in \mathbb{A}(P)$ ima dvostranski inverz f^{-1} natanko tedaj, ko je $f(x,x)\neq 0$ za vsak $x\in P$.

<u>Dokaz.</u> ($\Rightarrow$) Naj obstaja f^{-1}, torej $f*f^{-1}=\delta$. V posebnem:

$$(f*f^{-1})(x,x) = f(x,x)\cdot f^{-1}(x,x) = \delta(x,x) = 1 \Rightarrow f(x,x)\neq 0.\ \forall x.$$

($\Leftarrow$) Naj bo $f(x,x)\neq 0$ $\forall x\in P$. Če obstaja levi inverz f^{-1}, je zagotovo $f^{-1}(x,x)=\frac{1}{f(x,x)}$.

Za $x<y$ pa mora veljati:

$$(f^{-1}*f)(x,y) = \sum_{x\le z\le y} f^{-1}(x,z)\cdot f(z,y) = \sum_{x\le z<y} f^{-1}(x,z) f(z,y) + f^{-1}(x,y)\cdot f(y,y) = 0$$

$$\Rightarrow f^{-1}(x,y) = \frac{1}{f(y,y)}\Big(-\sum_{x\le z<y} f^{-1}(x,z)\cdot f(z,y)\Big).$$ To je induktivna definicija (ker $f^{-1}(x,z)$ $\exists$ po indukciji po dolžini intervala) levega inverza f^{-1}.

Podobno dokažemo obstoj desnega inverza. Potem pa morata biti oba enaka $\square$

Opomba: induktivni predpis je glede na $|[a,b]|$. Na primer, naj b pokriva a.

Tedaj je

$$f^{-1}(a,b) = \frac{1}{f(b,b)}\Big(-\sum_{a\le z<b} f^{-1}(a,z)\cdot f(z,b)\Big) = \frac{1}{f(b,b)}\Big(-f^{-1}(a,a) f(a,b)\Big)$$

$$= -\frac{f(a,b)}{f(a,a)\,f(b,b)}$$

Potem je

$$(f^{-1}*f)(a,b) = \sum_{a\le x\le b} f^{-1}(a,x)\cdot f(x,b) = f^{-1}(a,a)\cdot f(a,b) + f^{-1}(a,b)\cdot f(b,b)$$

$$= \frac{f(a,b)}{f(a,a)} + \frac{f(a,b)}{f(a,a)\cancel{f(b,b)}}\cdot \cancel{f(b,b)} = 0$$

PRIMER. Veriga dolžine n: $x_i \le x_j$, $0\le i,j\le n$

$$(\mu*\zeta)(x_i,x_j) = \sum_{i\le k\le j} \mu(x_i,x_k)\underbrace{\zeta(x_k,x_j)}_{=1} =$$

$$\sum_{k=i}^{j}\mu(x_i,x_k) = 0 \Rightarrow$$

$$\mu(x_i,x_j) = -\sum_{k=i}^{j-1}\mu(x_i,x_k)$$

$$\Downarrow$$

$$\mu(x_i,x_j) = \begin{cases} 1; & i=j \\ -1; & j=i+1 \\ 0; & j\ge i+2 \end{cases}$$

Def (Zeta-funkcija) $\zeta \in A(P)$:

$$\zeta(x,y) = \begin{cases} 1; & x\le y, \\ 0; & x\not\le y. \end{cases}$$

(Möbiusova funkcija): $\mu = \zeta^{-1} \in A(P)$.

Opomba: po prejšnji trditvi ima ζ dejansko inverz.

PRIMER ✗

TRDITEV. Naj bo P lokalno končna delna urejenost. Tedaj je:

$$\mu(a,a) = 1 \quad (a\in P)$$

$$\mu(a,b) = -\sum_{a\le z<b}\mu(a,z) = -\sum_{a<z\le b}\mu(z,b) \quad (a<b).$$

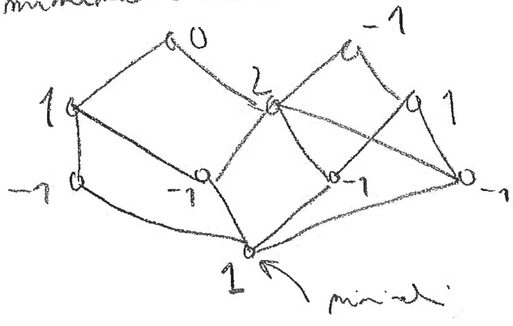
Dokaz. $(\zeta*\mu)(a,a) = \zeta(a,a)\cdot\mu(a,a) = \mu(a,a) = \delta(a,a) = 1$.

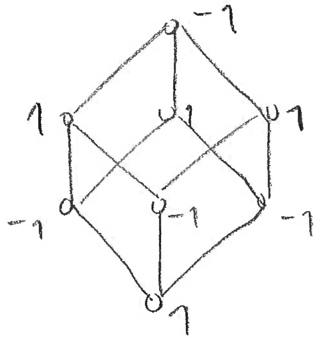
$a<b$: $(\mu*\zeta)(a,b) = \sum_{a\le x\le b}\mu(a,x)\cdot\zeta(x,b) = \sum_{a\le x<b}\mu(a,x)\cdot 1 + \mu(a,b)\cdot 1 = \delta(a,b) = 0$

$$\Rightarrow \mu(a,b) = -\sum_{a\le x<b}\mu(a,x).$$

$(\zeta*\mu)(a,b) = \dots \Rightarrow$ druga enakost. $\square$

Primer. V Hassejevem diagramu zapišimo vrednosti $\mu(0,a)$, kjer je 0 minimalni elt.





IZREK (**Möbiusova inverzija**) Naj bo $(P,\leq)$ lokalno končna delna urejenost in $f, g : P \to \mathbb{C}$. Tedaj velja:

(i) Inverzija od spodaj:

$$f(a) = \sum_{x \leq a} g(x) \quad (\forall a \in P) \iff g(a) = \sum_{x \leq a} f(x)\mu(x,a) \quad (\forall a \in P).$$

(ii) Inverzija od zgoraj:

$$f(a) = \sum_{x \geq a} g(x) \quad (\forall a \in P) \iff g(a) = \sum_{x \geq a} f(x)\mu(a,x) \quad (\forall a \in P).$$

Pri tem v (i) predpostavljamo, da P premore najmanjši elt. 0 in v (ii) da P premore največji elt. 1. 22

Dokaz. Definirajmo $\bar{f}, \bar{g} \in A(P)$ takole:

$$\bar{f}(0,a) = f(a), \quad \bar{f}(x,y) = 0,\ x \neq 0$$
$$\bar{g}(0,a) = g(a), \quad \bar{g}(x,y) = 0,\ x \neq 0.$$

Tedaj: $f(a) = \sum_{x \leq a} g(x) \ (\forall a) \iff \bar{f}(0,a) = \sum_{x \leq a} \bar{g}(0,x) \iff \bar{f}(0,a) = \sum_{x \leq a} \bar{g}(0,x) \cdot \underset{1}{\underset{\shortparallel}{\zeta(x,a)}}$

Torej: $f(a) = \sum_{x \leq a} g(x) \ (\forall a) \iff \bar{f} = \bar{g} * \zeta \quad / \cdot \mu$ (če je $x \neq 0$ je vedno $0 = 0$).

$\iff \bar{f} * \mu = \bar{g} \to$ to pa je natanko desna stran!

(ii) Analogno, le da sedaj postavimo:

$$\bar{f}(a,1) = f(a)$$
$$\bar{g}(a,1) = g(a).$$

$\square$

Primer. Za verigo može videti, da je

$$\mu(x_i,x_j)=\begin{cases}1\ ; & i=j\ ,\\ -1\ ; & j=i+1\ ,\\ 0\ ; & j\geq i+2\ .\end{cases}$$

Inverzija od spodaj potem pravi:

$$f(x_k)=\sum_{i=0}^{k} g(x_i)\quad (\forall k)\iff g(x_k)=f(x_k)-f(x_{k-1}).\quad (\forall k).$$

Temu rečemo teleskopija; seveda lahko to dobimo tudi direktno:

$$\left.\begin{array}{l} f(x_0)=g(x_0)\\ f(x_1)=g(x_0)+g(x_1)\\ f(x_2)=g(x_0)+g(x_1)+g(x_2)\\ \vdots\end{array}\right.\quad \begin{array}{l}\text{odštej} \Rightarrow g(x_1)=f(x_1)-f(x_0)\\ \text{odštej}: g(x_2)=f(x_2)-f(x_1)\ .\end{array}$$

Produkti delnih urejenosti

Da bi videli, kako Möbiusova inverzija posplošuje vključitev in izključitev, si poglejmo Möbiusovo funkcijo na produktu delnih urejenosti.

Naj bosta $(P_1,\leq_1)$ in $(P_2,\leq_2)$ delni urejenosti. Tedaj je delna urejenost tudi

$$P=P_1\times P_2\quad \text{in sicer z urejenostjo}\quad (a,b)\leq(c,d)\iff a\leq_1 c \text{ in } b\leq_2 d.$$

TRDITEV. Naj bodo μ,μ_1,μ_2 Möbiusove funkcije na P,P_1,P_2. Tedaj velja

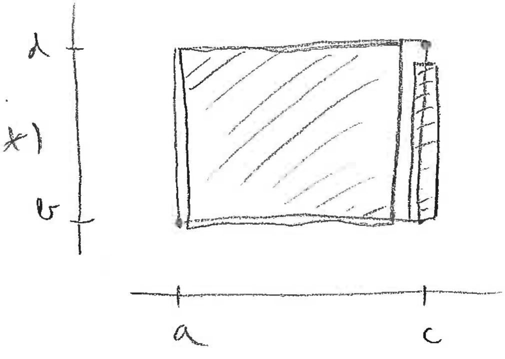
$$\mu((a,b),(c,d))=\mu_1(a,c)\cdot\mu_2(b,d).$$

Dokaz. Če je $(a,b)=(c,d)$, torej $a=c$, $b=d$, seveda imamo $1=1\cdot 1$.

Naj bo sedaj BŠS $b<d$. Tedaj z upoštevanjem trditve s str. 913 in z indukcijo (na velikost intervala):

$$\mu((a,b),(c,d)) \overset{\text{TRDITEV}}{=} -\sum_{(a,b)\le(x,y)<(c,d)} \mu((a,b),(x,y))$$

(*)



$$\overset{(*)}{=} -\sum_{b\le y<d} \mu((a,b),(c,y)) - \sum_{a\le x<c}\ \sum_{b\le y\le d} \mu((a,b),(x,y))$$

$$\overset{\text{ind.}}{=} \mu_1(a,c)\Big(\underbrace{-\sum_{b\le y<d}\mu_2(b,y)}_{\mu_2(b,d)\ \text{(trditev 9|3)}}\Big) - \sum_{a\le x<c}\mu_1(a,x)\Big(\sum_{b\le y\le d}\mu_2(b,y)\Big)$$

$$= \mu_1(a,c)\cdot\mu_2(b,d) - 0.$$ Pri tem je zadnji 0 ker, saj imamo:

$$\sum_{b\le y\le d}\mu_2(b,y) = \sum_{b\le y<d}\mu_2(b,y) + \mu_2(b,d) = \sum_{b\le y<d}\mu_2(b,y) - \sum_{b\le y<d}\mu_2(b,y).$$

□

Naj bosta P, Q končni delni urejenosti z najmanjšimi in največjimi elt. $0_P, 1_P, 0_Q, 1_Q$. Tedaj pišemo:

$$\mu(P) = \mu_P(0_P, 1_P) \quad \text{in} \quad \mu(Q) = \mu_Q(0_Q, 1_Q).$$

Iz trditve seveda takoj sledi, da je

$$\mu(P\times Q) = \mu(P)\cdot\mu(Q).$$

Primer. Naj bo L_n veriga dolžine $n\geq 1$, torej veriga z vsaj dvema elementoma.

Tedaj vemo, da je $$\mu(L_n) = \begin{cases} -1 ; & n=1 \\ 0 ; & \text{sicer} \end{cases}$$

Če so torej $L_{n_1}, \dots, L_{n_t}$ verige dolžine $n_i \geq 1$, tedaj je torej za delno urejenost $L = L_{n_1}\times\dots\times L_{n_t}$:

$$\mu(L) = \begin{cases} (-1)^t ; & n_1 = \dots = n_t = 1 \\ 0 ; & \text{sicer (vsaj en } n_i \geq 2). \end{cases}$$

Sedaj je vse pripravljeno za obljubljeno razlago posplošitve.

Naj bo S n-množica in opazujmo delno urejenost vseh njenih podmnožic, torej $\mathbb{B}(S)$.

Pišimo $\mathbb{B}(n) = \mathbb{B}(S)$. Tedaj velja

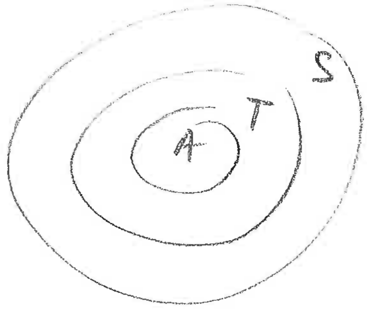
$$\mathbb{B}(n) \cong \underbrace{L_1 \times L_1 \times \dots \times L_1}_{n\text{-krat}} \qquad (1)$$

Res, naj bo $L_1 : \begin{array}{c} 1 \\ | \\ 0 \end{array}$, tedaj $A \in 2^S \overset{\varphi}{\mapsto}$ karakteristični vektor $\in L_1 \times \dots \times L_1$.

Očitno je potem $A \subseteq B \iff \varphi(A) \leq \varphi(B)$.

Zaradi (1) je po prejšnjem primeru

$$\mu(\mathbb{B}(n)) = (-1)^n.$$



Bolj splošno, če je $A \subseteq T \subseteq S$, tedaj je

$$[A,T] = \{U : A \subseteq U \subseteq T\} \cong \mathbb{B}(t),$$

kjer je $t = |T \setminus A|$. Zato je

$$\mu[A,T] = (-1)^{|T|-|A|}.$$

Sedaj imamo:

Möbiusova inverzija od zgoraj:

$$f(A) = \sum_{T \supseteq A} g(t) \quad (\forall A \in 2^S) \iff g(A) = \sum_{T \supseteq A} (-1)^{|T|-A} f(T)$$

To pa je natanko posplošitev pravila vključitev in izključitev s str. 8/4.