3. PARTICIJE ŠTEVIL IN DVANAJSTERA POT

- <u>Particija števila</u> n je zapis n kot vsota neničelnih sumandov:

$$n = \lambda_1 + \lambda_2 + \dots + \lambda_k,$$

kjer velja, da je $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \dots \geq \lambda_k \geq 1$. Sumandi λ_i so <u>kosi</u> particije, če je sumandov k, pravimo, da je to <u>k-particija</u>.

- Zapis: $\lambda = \lambda_1 \lambda_2 \dots \lambda_k$

- Oznake:

  $Par(n)$ ... množica particij števila n

  $p(n) = |Par(n)|$

  $Par(n;k)$ ... množica k-particij števila n

  $p(n;k) = |Par(n;k)|$ 6

<u>Primer.</u> $Par(6) = \{6, 51, 42, \underbrace{411, 33, 321}, 3111, \underline{222}, 2211, 21111, 111111\}$

Torej je $p(6) = 11$ in, na primer, $p(6;3) = 3$.

<u>Opomba.</u> Za nas vrstni red ni važen: $3+1+2 \equiv 1+3+2 \equiv 3+2+1 \dots$
Če gledamo urejene particije števila n, je problem lažji. Število urejenih k-particij števila n je

$$\binom{n-1}{k-1}.$$

Res: $\underbrace{-\,-\,|\,-\,-\,|\,-\,|\,-\,-\,-\,|\,-}_{n \text{ črtic (enic)}}$ razporediti moramo $k-1$ ločil na $n-1$ mest:
Na primer: $10 = 2+2+1+3+1$

- Nadaljnje oznake:

  $Par(n; \leq k)$ ... množica particij števila n z kvečjemu k kosi

  $p(n; \leq k) = |Par(n; \leq k)|$

TRDITEV. (i) $p(n;k) = p(n-k;\le k)$.

(ii) $p(n;k) = p(n-1;k-1) + p(n-k;k)$.

Dokaz. (i) preslikava $Par(n;k) \to Par(n-k;\le k)$

$$\lambda_1\dots\lambda_k \mapsto \lambda_1-1, \lambda_2-1, \dots, \lambda_k-1$$

je bijekcija (pri tem morebitne ničle v sliki opustimo).

(ii)
$$
\begin{aligned}
p(n;k) &\overset{(i)}{=} p(n-k;\le k) \\
&= p(n-k;k) + \underbrace{p(n-k;k-1) + \dots + p(n-k;1)} \\
&= p(n-k;k) + p(n-k;\le k-1) \\
&\overset{(i)}{=} p(n-k;k) + p(n-1;k-1).
\end{aligned}
$$

$$\boxed{\begin{aligned} &p(n-1;k-1) = \\ &p((n-1)-(k-1);\le k-1) = \\ &p(n-k;\le k-1). \end{aligned}}$$

$\square$

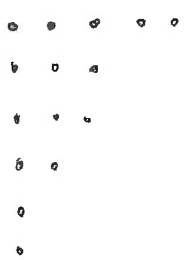
Primer.
$$
\begin{aligned}
p(6;3) &\overset{(2)}{=} p(5;2) + p(3;3) \\
&= (\underset{\underset{1}{\shortparallel}}{p(4;1)} + \underset{\underset{1}{\shortparallel}}{p(3;2)}) + \underset{\underset{1}{\shortparallel}}{p(3;3)} = 3.
\end{aligned}
$$

FERRERSOVI DIAGRAMI:

Če je $\lambda = \lambda_1\lambda_2\dots\lambda_k$ k-particija števila n, je Ferrersov diagram grafični prikaz z $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k$ pikami po vrsticah.

Na primer: $\lambda = 64311$ je 5-particija števila 15, Ferrersov diagram pa je

Če ga transponiramo, dobimo konjugirano particijo λ^*: v zgornjem primeru:



$\lambda^* = 533211$ dobimo 6-particijo števila 15.

- Še več oznak:

$Par(n;k;m)$ ... množica k-particij števila n, kjer je največji kos enak m

$p(n;k;m) = |Par(n;k;m)|$

$Par(n;k;\leq m)$ in $Par(n;\leq k;\leq m)$ analogno

$p(n;k;\leq m)$ in $p(n;\leq k;\leq m)$ -||-

$p(;\leq k;\leq m) = |Par(;\leq k;\leq m)|$ ... brez omejitev na n.

Primer. $Par(;\leq 3;\leq 2) = \{222, 221, 211, 111, 22, 21, 11, 2, 1, \emptyset\}$.
Torej je $p(;\leq 3;\leq 2) = 10$.

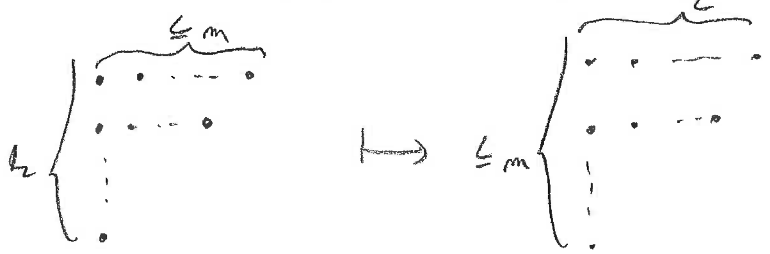
TRDITEV. (i) $p(n;k;m) = p(n;m;k)$.

(ii) $p(n;k;\leq m) = p(n;\leq m;k)$

(iii) $p(;\leq k;\leq m) = p(;\leq m;\leq k)$.

Dokaz. Direktno s Ferrersom in konjugacijo. Na primer (ii):

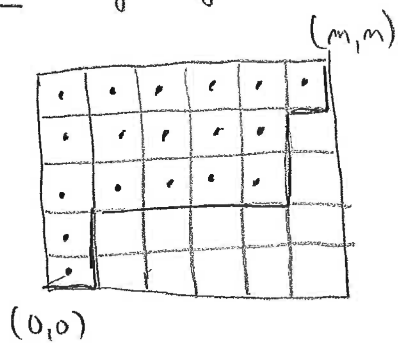
$p(n;k;\leq m)$:



□

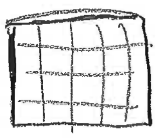
IZREK. $p(;\leq n;\leq m) = \binom{m+n}{m}$.

Dokaz. Bijekcija z mrežnimi potmi od $(0,0)$ do (m,n):



To nam da particijo z $\leq n$ kosi in največji kos je $\leq m$! To je bijekcija ...

Opomba:



ta pot pa nam šteje prazno particijo!

□

DVANAJSTERA POT

Naj bo N n-množica (žoge)

R r-množica (škatle).

Na koliko načinov lahko razporedimo žoge v škatle? Torej iščemo, koliko funkcij $f: N \to R$ imamo. Pri tem imamo 12 možnosti: žoge / škatle razlikujemo ali ne (4) $4 \cdot 3 = 12$

f je poljubna, injektivna, surjektivna (3)

DA ... razlikujemo

NE ... ne razlikujemo

$f: N \to R$	poljubna	injektivna	surjektivna
N DA R DA	r^n	$r^{\underline{n}}$	$r!\,S(n,r)$
N NE R DA	$\binom{r+n-1}{n} = \frac{r^{\overline{n}}}{n!}$	$\binom{r}{n} = \frac{r^{\underline{n}}}{n!}$	$\binom{n-1}{r-1}$
N DA R NE	$\sum_{k=1}^{r} S(n,k)$	0 ali 1	$S(n,r)$
N NE R NE	$\sum_{k=1}^{r} p(n;k)$	0 ali 1	$p(n;r)$

Opombe:

druga vrsta:

$\binom{r+n-1}{n}$ ... $\underset{1}{\sqcup}$ - - - - $\underset{r}{\sqcup}$ r škatel, vanje n enakih žog: $n\times$ neodvisno izberemo škatlo ... $\equiv$ število n-multimnožic r-množice.

$\binom{r}{n}$ ... izberemo n različnih škatel izmed r škatel

$\binom{n-1}{r-1}$ ... glej str. 3/1! — —|— — —|— —|—|— —

n žog razbij urejeno v r škatel

tretja vrsta: vsa razbitja v $\leq r$ razredov.

- 1, če je $r \geq n$; 0 sicer
- vsa razbitja v r razredov

četrta vrsta: particije n z $\leq r$ členi.

- 1, če je $r \geq n$; 0 sicer
- natanko r členov.