8. PRAVILO VKLJUČITEV IN IZKLJUČITEV

<u>IZREK</u>. Naj bodo $A_1,\dots,A_n$ podmnožice množice X. Tedaj je

$$\left|X \setminus \bigcup_{i=1}^{n} A_i\right| = |X| - \sum_{i=1}^{n}|A_i| + \sum_{i<j}|A_i\cap A_j| - \dots + (-1)^n|A_1\cap\dots\cap A_n|.$$

<u>Dokaz</u>. $x\in X$. Pogledamo, kolikokrat ga štejemo levo in desno.

(i) $x\notin \bigcup A_i \Rightarrow$ obakrat štejemo $1\times$.

(ii) $x\in\bigcup A_i$: naj bo x v m množicah. Na levi ga seveda štejemo $0\times$, desno pa:

$$1-\binom{m}{1}+\binom{m}{2}-\binom{m}{3}+\dots+(-1)^m\binom{m}{m}$$

in to je ravno 0, kot že vemo. $\square$

Da bo lahko splošneje pogledamo takole. Naj bo

X (univerzalna množica) in

$E=\{e_1,\dots,e_n\}$ množica lastnosti, ki jih <u>lahko</u> imajo elt. iz X.

Naj bo

A_i podmnožica elt., ki imajo lastnost e_i (in morda še kako drugo).

Tedaj je

$\left|X\setminus\bigcup_{i=1}^{n}A_i\right|$ število elt., ki nimajo nobene lastnosti iz E

Naj bo sedaj za $T\subseteq E$:

$N_{\supseteq T} = |\{x\in X: x \text{ ima } \underline{\text{vsaj}} \text{ lastnosti iz } T\}|$

$N_{=T} = |\{x\in X: x \text{ ima } \underline{\text{natanko}} \text{ lastnosti iz } T\}|$

<u>IZREK</u> (<u>Pravilo vključitev in izključitev</u>) Naj bo X množica in $E=\{e_1,\dots,e_n\}$ množica lastnosti. Tedaj velja:

$$N_{=\emptyset} = \sum_{T\subseteq E}(-1)^{|T|}N_{\supseteq T} = \sum_{k=0}^{n}(-1)^k\sum_{T:|T|=k}N_{\supseteq T}.$$

Dokaz. Če je $T = \{a_{i_1}, \dots, a_{i_t}\}$, tedaj je $N_{\supseteq T}$ množica tistih elt., ki imajo vse lastnosti $e_{i_1}, \dots, e_{i_t}$, torej:

$$N_{\supseteq T} = |A_{i_1} \cap \dots \cap A_{i_t}|.$$

V posebnem je $N_{\supseteq \emptyset} = |X|$. $\square$

18

Def. Množica lastnosti E je *homogena*, če je $N_{\supseteq T}$ odvisno le od $|T|$. Z drugimi besedami, če velja: $|T| = |T'| \Rightarrow N_{\supseteq T} = N_{\supseteq T'}$.

Če je E homogena, uporabljamo oznaki:

$$N_{\geq k} = N_{\supseteq T} \quad \text{za } |T| = k$$

in

$$N_{=k} = N_{=T} \quad \text{(da je to neodvisno od } T \text{ bomo videli kasneje).} \qquad (=)$$

POSLEDICA. Če je X množica in $E = \{e_1, \dots, e_n\}$ homogena množica lastnosti, tedaj je

$$N_{=0} = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n}{k} N_{\geq k}.$$

Primer 1. (Eulerjeva funkcija φ) $\varphi(n) = |\{d : d \in [n], (d,n) = 1\}|$.

$n = p_1^{a_1} \cdots p_t^{a_t}$ razcep n na praštevila

$X = [n]$

e_i ... p_i deli d. Tedaj je $\varphi(n) = N_{=\emptyset}$

$N_{\supseteq T}$ ... število števil iz $[n]$, ki so večkratniki od $\prod_{e_i \in T} p_i$. Torej je

$$N_{\supseteq T} = \frac{n}{\prod_{e_i \in T} p_i}$$

in pravilo vključitev in izključitev pravi:

$$\varphi(n) = n - \sum_{i=1}^{t} \frac{n}{p_i} + \sum_{i<j} \frac{n}{p_i p_j} - \dots \pm (-1)^t \frac{n}{p_1 p_2 \cdots p_t}$$

$$= n(\qquad)$$

$$= n \prod_{i=1}^{t} \left(1 - \frac{1}{p_i}\right)$$

Primer 2. Najbolj

$p_o(n)$ ... # particij n z lihimi sumandi ($o \equiv$ odd)

$p_d(n)$ ... # particij n z različnimi sumandi ($d \equiv$ distinct).

$X = \mathrm{Par}(n)$

e_i ... particija vsebuje sodi sumand i ($i \in [n]$).

$p_o(n) = N_{=0}$ in zato pravilo pravi:

$$p_o(n) = p(n)$$
$$- p(n-2) - p(n-4) - p(n-6) - \dots$$
$$+ p(n-2-4) + p(n-2-6) + p(n-2-8) + \dots$$
$$- p(n-2-4-6) - \dots$$

Najbolj sedaj

e_i ... particija, kjer i nastopa vsaj dvakrat.

Sedaj imamo:

$$p_d(n) = p(n)$$
$$- p(n-1-1) - p(n-2-2) - p(n-3-3) - \dots$$
$$+ p(n-1-1-2-2) + p(n-1-1-3-3) + \dots$$
$$\vdots$$

Zaključimo: $\boxed{p_o(n) = p_d(n)}$

Na primer, $n = 8$

$8 = 7+1$
$5+3$
$5+1+1+1$
$3+3+1+1$
$3+1+1\dots+1$
$1+1\dots+1$

$\# = 6$

$8 = 8$
$7+1$
$6+2$
$5+3$
$5+2+1$
$4+3+1$

$\# = 6$

Poglejmo sedaj kako posplošitev pravila vključitev in izključitev.

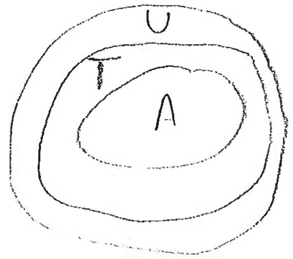
IZREK. Naj bo E končna množica in $f, g : 2^E \to \mathbb{C}$.

Opomba: velja še bolj splošno: $f, g : 2^E \to K$, kjer je K obseg s karakteristiko 0.

Tedaj velja:

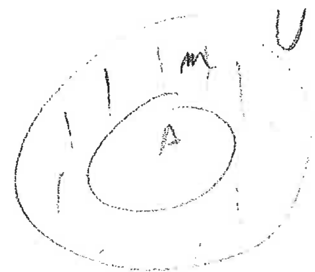
$$f(A) = \sum_{T \supseteq A} g(T) \quad (\forall A) \iff g(A) = \sum_{T \supseteq A} (-1)^{|T|-|A|} f(T) \quad (\forall A).$$

Dokaz. $(\Rightarrow)$ Naj velja $f(A) = \sum_{T \supseteq A} g(T)$. Tedaj imamo:



$$\sum_{T \supseteq A} (-1)^{|T|-|A|} f(T) = \sum_{T \supseteq A} (-1)^{|T|-|A|} \sum_{U \supseteq T} g(U)$$

$$= \sum_{U \supseteq A} \Big(\sum_{U \supseteq T \supseteq A} (-1)^{|T|-|A|} \Big) g(U) \overset{(*)}{=}$$



Fiksirajmo U in naj bo $|U \setminus A| = m$. Tedaj je

$$\sum_{U \supseteq T \supseteq A} (-1)^{|T|-|A|} = \sum_{k=0}^{m} (-1)^k \binom{m}{k} = \delta_{m,0}$$

zato dobimo neničelno vrednost le za $m = 0$, tj. za $U = A$:

$$\overset{(*)}{=} g(A).$$

$(\Leftarrow)$ Gre zelo podobno: Naj velja desna stran, potem je

$$\sum_{T \supseteq A} g(T) = \sum_{T \supseteq A} \sum_{U \supseteq T} (-1)^{|U|-|T|} f(U)$$

$$= \sum_{U \supseteq A} \Big(\underbrace{\sum_{U \supseteq T \supseteq A} (-1)^{|U|-|T|}}_{= \delta_{m,0} \text{ za } m = |U \setminus A|} \Big) f(U) = f(A).$$

$\square$

POSLEDICA. Naj bo X množica in $A \subseteq E = \{e_1, \ldots, e_n\}$, kjer je E množica lastnosti.

Tedaj je $$N_{=A} = \sum_{T \supseteq A} (-1)^{|T|-|A|} N_{\supseteq T}.$$

Dokaz. V izreku postavimo: $g(A) = N_{=A}$ in $f(A) = N_{\supseteq A}$. Ker očitno velja $N_{\supseteq A} = \sum_{T \supseteq A} N_{=A}$, posledica takoj sledi iz izreka. $\square$

Opomba 1: Če je $A = \emptyset$, posledica pravi:

$$N_{=\emptyset} = \sum_{T \subseteq E} (-1)^{|T|} N_{\geq T},$$

kar je pravilo vključitev in izključitev.

Opomba 2: Naj bo E homogena množica lastnosti. Tedaj iz posledice sledi, da

$|A| = |B| \implies N_{=A} = N_{=B}$. To smo razjasnili v $(\Rightarrow)$ na str. 8/2.

Še ena

POSLEDICA. Naj bo X (univerzalna) množica, $E = \{e_1, \ldots, e_n\}$ množica lastnosti in N_p število elt. iz X, ki imajo natanko p lastnosti. Tedaj je

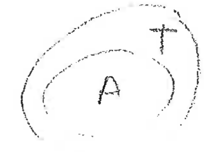
$$N_p = \sum_{k=p}^{n} (-1)^{k-p} \binom{k}{p} \sum_{T : |T| = k} N_{\geq T}.$$

V posebnem, če je E homogena, tedaj je

$$N_p = \binom{n}{p} \sum_{k=p}^{n} (-1)^{k-p} \binom{n-p}{k-p} N_{\geq k}.$$

Dokaz. Uporabimo prejšnjo posledico.

$$N_p = \sum_{A : |A| = p} N_{=A} = \sum_{A : |A| = p} \sum_{T \supseteq A} (-1)^{|T| - |A|} N_{\geq T}$$



$|A| = p$

$$= \sum_{T : |T| \geq p} (-1)^{|T| - p} \sum_{A : |A| = p,\, T \supseteq A} N_{\geq T}$$

$$= \sum_{k=p}^{n} (-1)^{k-p} \binom{k}{p} \sum_{|T| = k} N_{\geq T}. \quad (1)$$

za fiksen k je še $\binom{k}{p}$ možnih podmnožic A z $|A| = p$.

Naj bo sedaj E homogena lastnost. Tedaj je (1) enako:

$$\sum_{k=p}^{n} (-1)^{k-p} \binom{k}{p} \binom{n}{k} N_{\geq k} = \sum_{k=p}^{n} (-1)^{k-p} \frac{k!}{p!(k-p)!} \frac{n!}{k!(n-k)!} N_{\geq k} \cdot \frac{(n-p)!}{(n-p)!}$$

število je vseh množic T, vsaka ima $N_{\geq k}$ (v smislu Opombe 2)

$$= \binom{n}{p} \sum_{k=p}^{n} (-1)^{k-p} \binom{n-p}{k-p} N_{\geq k}. \qquad \square$$

Opomba: $A_1, \dots, A_n \subseteq X$, $e_i \dots$ lastnost množice A_i. Potem posledica pravi, da je

$$N_0 = N_{=0} = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n}{k} N_{\geq k},$$

kar je natanko posledica s str. 8|2.

Primer. Koliko je permutacij v $[n]$, ki imajo natanko p negibnih točk?

$X = [n]$; $e_i \dots$ i je negibna točka.

$N_{\geq k} = N_{\supseteq T}$ za $|T| = k$. Torej

Tedaj je $N_{\geq k}$ # permutacij, ki imajo vsaj k (fiksnih) negibnih točk

$$N_p = \binom{n}{p} \sum_{k=p}^{n} (-1)^{k-p} \binom{n-p}{k-p} (n-k)! \quad = \frac{(n-p)!}{(k-p)!}$$

$$= \binom{n}{p} (n-p)! \sum_{k=p}^{n} (-1)^{k-p} \frac{1}{(k-p)!}$$

$$= \binom{n}{p} \underbrace{(n-p)! \sum_{k=0}^{n-p} (-1)^k \frac{1}{k!}}_{\#\ \text{deranžmajev } [n-p]} = \binom{n}{p} \cdot D_{n-p}.$$

Seveda lahko dobimo rezultat tudi direktno: izberemo p negibnih točk: $\binom{n}{p}$, ostalo je deranžma: D_{n-p}.