7. REŠEVANJE REKURZIJ

Poglejmo na standardnem primeru (Fibonaccijeva števila), kako z rodovnimi funkcijami rešujemo rekurzije. Torej: $F_0=0$, $F_1=1$, $F_n=F_{n-1}+F_{n-2}$, $n\ge 2$. Določi F_n.

KORAK 1. Zapiši rekurzijo z eno enačbo, ki vključuje tudi začetne pogoje.

$F_n=0$ za $n<0$. $F_n=F_{n-1}+F_{n-2}$ velja za $n=0$, $n=2,3,\dots$. Ne pa za $n=1$.

Uporabimo Iversonovo konvencijo:

$$[P] = \begin{cases}1; & P \text{ je resnično}\\ 0; & \text{sicer.}\end{cases}$$

Tedaj lahko zapišemo:

$$F_n = F_{n-1}+F_{n-2}+[n=1]. \qquad (1)$$

KORAK 2. Izrazi (1) kot enačbo med rodovnimi funkcijami.

$$F(z)=\sum_{n\ge 0}F_n z^n = \sum_n F_{n-1}z^n + \sum_n F_{n-2}z^n + \sum_n [n=1]z^n$$

$$= zF(z)+z^2F(z)+z \qquad \text{(zamik indeksa; množenje z } z\text{)} \quad (2)$$

KORAK 3. Reši enačbo iz koraka 2.

$$F(z)=\frac{z}{1-z-z^2}. \qquad (3)$$

KORAK 4. Izrazi desno stran iz (3) kot rodovno funkcijo in preberi rešitev.

Pišimo $1-z-z^2=(1-\alpha z)(1-\beta z)$ in izračunajmo parcialne ulomke:

$$\frac{1}{(1-\alpha z)(1-\beta z)} = \frac{a}{1-\alpha z}+\frac{b}{1-\beta z}$$

Sedaj imamo:

$$F(z)=z\left(\frac{a}{1-\alpha z}+\frac{b}{1-\beta z}\right) = z\cdot\left(a\sum_{n\ge 0}\alpha^n z^n + b\sum_{n\ge 0}\beta^n z^n\right)$$

$$=\sum_{n\ge 0}\left(a\alpha^{n-1}+b\beta^{n-1}\right)z^n \Rightarrow \boxed{F_n = a\alpha^{n-1}+b\beta^{n-1}}.$$

Določiti je treba še a, b, α, β. Naj bo $c(z) = 1 - z - z^2$; in postavimo

$$c^R(z) = z^2 - z - 1.$$

Trdimo, da $c^R(z) = (z-\alpha)(z-\beta)$ implicira $c(z) = (1-\alpha z)(1-\beta z)$. Z drugimi besedami, iščemo α in β kot korena $c^R(z)$.

Dokažimo to splošno. Naj bo

$$c(z) = 1 + c_1 z + \dots + c_d z^d \quad , \; d \geq 1, \; c_d \neq 0.$$

in

$$c^R(z) = z^d + c_1 z^{d-1} + \dots + c_d .$$

Torej: $c(z) = z^d \cdot c^R\left(\frac{1}{z}\right)$.

Naj bo sedaj

$$c^R(z) = (z-\alpha_1) \dots (z-\alpha_d) .$$

Potem je

$$c(z) = z^d \left(\frac{1}{z} - \alpha_1\right) \dots \left(\frac{1}{z} - \alpha_d\right) = (1-\alpha_1 z) \dots (1-\alpha_d z).$$

Nazaj k primeru:

$$c^R(z) = z^2 - z - 1 = \left(z - \frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)\left(z - \frac{1-\sqrt{5}}{2}\right) = (z-\tau)(z-\hat{\tau})$$

$$\tau = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \quad \hat{\tau} = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$$

in zato:

$$c(z) = (1-\tau z)(1-\hat{\tau} z).$$

Opomba: Ker je $z^2 - z - 1 = (z-\tau)(z-\hat{\tau})$, preberemo, da je $\tau + \hat{\tau} = 1$ in $\hat{\tau} = -\tau^{-1}$.

Torej imamo: $\alpha = \tau$, $\beta = \hat{\tau}$. Določiti je treba še a, b:

$$\frac{1}{(1-\tau z)(1-\hat{\tau} z)} = \frac{a}{1-\tau z} + \frac{b}{1-\hat{\tau} z} = \frac{a - \hat{\tau} a z + b - \tau b z}{(1-\tau z)(1-\hat{\tau} z)} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{array}{l} a + b = 1 \\ \hat{\tau} a + \tau b = 0 \end{array} \Rightarrow a = \frac{\tau}{\sqrt{5}}, \; b = -\frac{\hat{\tau}}{\sqrt{5}}$$

Torej: $F_n = \frac{\tau}{\sqrt{5}} \tau^{n-1} - \frac{\hat{\tau}}{\sqrt{5}} \hat{\tau}^{n-1} = \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\tau^n - \hat{\tau}^n\right) = \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n\right)$

Opomba: Ker je $\left|\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right| < 1$, je F_n celo število najbližje $\frac{1}{\sqrt{5}} \tau^n$.

Izrek. Naj bodo $c_1,\dots,c_d$, $d\geq 1$, $c_d\neq 0$, kompleksna števila in
$$C(z) = 1+c_1z+\dots+c_dz^d = (1-\alpha_1 z)^{d_1}\cdots(1-\alpha_k z)^{d_k},$$
kjer so $\alpha_1,\dots,\alpha_k$ različni koreni $c(z)$. Za $f: \mathbb{N}_0\to\mathbb{C}$ so tedaj ekvivalentni naslednji pogoji:

(A1) Rekurzija reda d: $f(n+d)+c_1f(n+d-1)+\dots+c_df(n)=0 \quad (n\geq 0)$

(A2) Rodovna funkcija: $F(z)=\sum_{n\geq 0} f(n)z^n = \frac{p(z)}{c(z)}$, kjer je $p(z)$ stopnje $\leq d-1$.

(A3) Parcialni ulomki: $F(z)=\sum_{n\geq 0} f(n)z^n = \sum_{i=1}^{k}\frac{g_i(z)}{(1-\alpha_i z)^{d_i}}$, je je $g_i(z)$ stopnje $\leq d_i-1$.

(A4) Eksplicitna oblika: $f(n)=\sum_{i=1}^{k} p_i(n)\,\alpha_i^n$, kjer je $p_i(n)$ polinom stopnje $\leq d_i-1$.

Dokaz. $V_i = \{f: \mathbb{N}_0\to\mathbb{C} : f \text{ zadošča } (A_i)\}$ $\quad 1\leq i\leq 4$.

To so vsi vektorski prostori: zadošča, da preverimo zaprtost za + in množenje s skalarjem.

Na primer, naj bosta $f_1, f_2\in V_2$. Tedaj je
$$F_1(z)=\frac{p_1(z)}{c(z)},\quad F_2(z)=\frac{p_2(z)}{c(z)} \qquad \mathrm{st}(p_1(z)),\ \mathrm{st}(p_2(z))\leq d-1 \Rightarrow$$
$$F_1(z)+F_2(z)=\frac{p_1(z)+p_2(z)}{c(z)} \Rightarrow f_1+f_2\in V_2.$$ Podobno za produkt s skalarjem.

- $\dim(V_1)=\dim(V_2)=\dim(V_3)=\dim(V_4)=d$.

V_1: začetne vrednosti $f(0), f(1),\dots, f(d-1)$ izbiramo poljubno

V_2: d nedoločenih koeficientov polinoma $p(z)$.

V_3: skupaj d ned. koeficientov v $g_i(z)$.

V_4: analogno.

- Ideja: Če pokažemo, da je $V_i\subseteq V_j \Rightarrow V_i=V_j$ (ker da pač iste dimenzije).

(i) Naj bo $f\in V_2$. Tedaj je $F(z)=\sum f(n)z^n = \frac{p(z)}{c(z)}$, oziroma:
$$(1+c_1z+\dots+c_dz^d)\sum f(n)z^n = p(z)$$
koeficient pri z^{n+d}: $f(n+d)+c_1f(n+d-1)+\dots+c_df(n) = 0$ ker je $p(z)$ stopnje $\leq d-1$.

Torej je $V_2\subseteq V_1 \Rightarrow V_1=V_2$.

(ii) Naj bo $f \in V_3$: Tedaj je

$$F(z) = \sum_{i=1}^{k} \frac{g_i(z)}{(1-\alpha_i z)^{d_i}} \underset{\substack{\uparrow \\ \text{skupni} \\ \text{ulomek}}}{=} \frac{\sum_{i=1}^{k} g_i(z) \cdot \prod_{j \neq i} (1-\alpha_j z)^{d_j}}{\prod_{i=1}^{k} (1-\alpha_i z)^{d_i}} = \frac{p(z)}{c(z)},$$

kjer je $\deg(p(z)) \leq \max_i \left(\deg(g_i) + \sum_{j \neq i} d_j\right) < d$. Torej je $f \in V_2$, oz.

$V_3 \subseteq V_2 \Rightarrow V_2 = V_3 \; (= V_1)$.

(iii) Dokažimo še, da je $V_3 \subseteq V_4$. Naj bo $f \in V_3$; opazujmo sumand $\frac{g_i(z)}{(1-\alpha_i z)^{d_i}}$:

$$\frac{1}{(1-\alpha_i z)^{d_i}} = \sum_{n \geq 0} \binom{n+d_i-1}{n} (\alpha_i z)^n$$

$$\frac{1}{(1-z)^m} = \sum_{n \geq 0} \binom{n+m-1}{n} z^n$$

$$= \sum_{n \geq 0} \binom{d_i+n-1}{d_i-1} \alpha_i^n z^n.$$

Naj bo $g_i(z) = g_0 + g_1 z + \dots + g_{d_i-1} z^{d_i-1}$. Kot vemo, množenje z z^j pomeni premik indeksa za $-j$, zato je

$$g_i(z) \cdot \frac{1}{(1-\alpha_i z)^{d_i}} = \sum_{n \geq 0} \left(\sum_{j=0}^{d_i-1} g_j \binom{d_i+n-j-1}{d_i-1} \alpha_i^{n-j} \right) z^n$$

$$= \sum_{n \geq 0} \underbrace{\left(\sum_{j=0}^{d_i-1} \alpha_i^{-j} g_j \binom{d_i+n-j-1}{d_i-1} \right)}_{=: p_i(n) \;\ldots\; \text{polinom stopnje} \leq d_i - 1} \alpha_i^n z^n$$

$$\binom{d_i+n-j-1}{d_i-1} = \frac{(d_i+n-j-1)^{\underline{d_i-1}}}{(d_i-1)!}$$

$\Rightarrow f(n) = p_i(n) \cdot \alpha_i^n$

$\Rightarrow f \in V_4$. $\square$

Na opisani način lahko rešujemo tudi sisteme rekurzivnih enačb.

Primer. $a_0 = 1$, $a_n = 5a_{n-1} + 12 b_{n-1}$

$b_0 = 0$, $b_n = 2a_{n-1} + 5 b_{n-1}$

Korak 1: $a_n = 5a_{n-1} + 12 b_{n-1} + [n=0]$ zaradi $a_0 = 1$

$b_n = 2a_{n-1} + 5b_{n-1}$

Korak 2. $A(z) = 5zA(z) + 12zB(z) + 1$

$B(z) = 2zA(z) + 5zB(z)$

Korak 3. $A(z)(1-5z) = 12zB(z) + 1$

$B(z)(1-5z) = 2zA(z) \rightarrow B(z) = \frac{2z}{1-5z}A(z)$

$A(z)(1-5z) = 12z\frac{2z}{1-5z}A(z) + 1 \longrightarrow$

$A(z)\left[(1-5z) - \frac{24z^2}{1-5z}\right] = 1 \longrightarrow A(z)\left[\frac{1-10z+25z^2-24z^2}{1-5z}\right] = 1$

$$\Rightarrow A(z) = \frac{1-5z}{1-10z+z^2}$$

Korak 4. $c(z) = 1-10z+z^2 = c^R(z)$; $c^R(z) = (z-(5+2\sqrt{6}))(z-(5-2\sqrt{6}))$,

torej je $\alpha_1 = 5+2\sqrt{6}$, $\alpha_2 = 5-2\sqrt{6}$. Določimo še konstante ... in dobimo:

$$a_n = \frac{1}{2}\left[(5+2\sqrt{6})^n + (5-2\sqrt{6})^n\right].$$

Analogno dobimo tudi b_n.